C. PLĂVIȚU • A. HRISTEV • L. GEORGESCU • D. BORȘAN • V. DIMA
C. STĂNESCU • L. IONESCU • R. MOLDOVAN

PROBLEME DE MECANICĂ FIZICĂ ȘI ACUSTICĂ

13.05.1997

MINISTERUL EDUCAȚIEI ȘI ÎNVĂȚĂMÎNTULUI

C. PLĂVIȚU, A. HRISTEV, L. GEORGESCU, D. BORȘAN, V. DIMA,
C. STĂNESCU, L. IONESCU, R. MOLDOVAN

PROBLEME DE MECANICĂ FIZICĂ ȘI ACUSTICĂ

Ediția a II-a

Editura didactică și pedagogică
București

BIBLIOTECA
Ing. BOTOIU
DORIN
FAMILIEI

TABLA DE MATERII

Prefața 4

Capitolul 1. **Cinematica punctului material** — L. Georgescu
Enunțuri 5
Rezolvări 123

Capitolul 2. **Dinamica punctului material** — D. Borșan
Enunțuri 16
Rezolvări 146

Capitolul 3. **Mecanica solidului rigid** — A. Hristev
Enunțuri 32
Rezolvări 193

Capitolul 4. **Statica** — C. Stănescu
Enunțuri 79
Rezolvări 243

Capitolul 5. **Atracția universală** — C. Plăviţu
Enunțuri 83
Rezolvări 249

Capitolul 6. **Mecanica fluidelor** — V. Dima
Enunțuri 96
Rezolvări 273

Capitolul 7. **Oscilații și unde** — L. Ionescu
Enunțuri 105
Rezolvări 286

Capitolul 8. **Acustica** — R. Moldovan
Enunțuri 118
Rezolvări 307

Anexe 315

Bibliografie 320

PREFAȚĂ

Legătura indisolubilă care trebuie să existe între teorie și practică, între cunoștințele primite la curs și modul în care ele se aplică se bazează în bună parte și pe rezolvarea de probleme, specifice fiecărei discipline. Din această cauză este necesar ca disciplinele de fizică — și mai ales disciplinele generale — să beneficieze de culegeri de probleme care să ușureze studenților aprofundarea cunoștințelor prezentate la curs și să constituie în același timp o verificare sigură a cunoașterii principiilor pe care se bazează rezolvarea problemelor propuse.

Culegerea de probleme de față se adresează în mod special studenților anului I de la facultățile de fizică, care audiază cursul de Mecanică fizică și acustică, dar și tuturor studenților care au în programa de învățămînt disciplina Fizică. Ea cuprinde 476 probleme din capitolele clasice consacrate acestei discipline: Cinematica, Dinamica punctului material, Dinamica solidului rigid, Statica, Atracția universală, Mecanica fluidelor, Oscilații și unde și Acustică, probleme care sînt propuse spre rezolvare în mod curent studenților de la Facultatea de fizică din București. Fiecare capitol are o scurtă introducere teoretică cuprinzînd relațiile mai importante care trebuie cunoscute pentru găsirea soluțiilor problemelor din capitolul respectiv.

În partea a doua a lucrării, Rezolvări, problemele sînt rezolvate fie în totalitate, fie parțial, fie se dă numai rezultatul final, în funcție de gradul lor de dificultate; în cazul problemelor cu același tip de raționament se rezolvă integral numai o singură problemă.

Această culegere de probleme se rezumă strict la programa cursului de Mecanică fizică, fără a fi înglobate probleme de Mecanică teoretică, dar se folosesc în mod curent elementele analizei matematice (calcul diferențial, calcul integral etc.), care se presupun cunoscute. Aparatul matematic folosit contribuie substanțial la înțelegerea fenomenelor fizice și din această cauză, culegerea de față constituie un bun îndreptar pentru profesorii care predau fizica în liceu și pentru un cerc larg de cititori care vor să aprofundeze mai bine cunoștințele de Mecanică fizică.

Găsim aici probleme de Mecanică fizică și acustică din diferite cărți și publicații (vezi bibliografia), precum și probleme originale, rezultat al unei practici pedagogice de ani de zile al colectivului de autori de la Facultatea de fizică din București, în munca lor cu studenții.

Avem convingerea că, în modul în care a fost elaborată, această culegere de probleme, va contribui la o pregătire și mai temeinică a studenților la disciplina de Mecanică fizică și acustică și la dezvoltarea gîndirii lor științifice în vederea abordării cu succes a celorlalte capitole din fizică, care au toate însă la bază, principiile mecanicii.

Prof. dr. doc. **V. P. MIHU**

Capitolul 1

CINEMATICA PUNCTULUI MATERIAL

Locul geometric pe care îl descrie un punct material în mișcare se numește *traiectorie*.

Viteza unui mobil este

$$v = \frac{ds}{dt}, \tag{1.1}$$

în care ds este spațiul parcurs de mobil pe o traiectorie oarecare în timpul dt. Vectorul viteză $\vec{v}$, care este totdeauna un vector tangent la traiectorie și îndreptat în sensul mișcării, este dat de relația

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt}, \tag{1.2}$$

unde $\vec{r}$ este vectorul de poziție.

Accelerația unui mobil este

$$a = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2s}{dt^2}, \tag{1.3}$$

iar vectorul accelerație

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2}. \tag{1.4}$$

Într-o *mișcare curbilinie*, accelerația totală este egală în modul cu:

$$a = \sqrt{a_t^2 + a_n^2}, \tag{1.5}$$

în care $a_t = \frac{dv}{dt}$ este accelerația tangențială, iar $a_n = \frac{v^2}{\rho}$ este accelerația normală, ρ fiind raza de curbură.

Elementele cinematice ale *mișcării circulare* sînt: perioada T (timpul în care se execută o mișcare de rotație completă), frecvența $\nu = \frac{1}{T}$, viteza unghiulară ω dată de expresia

$$\omega = \frac{d\alpha}{dt} \tag{1.6}$$

și accelerația unghiulară

$$\varepsilon = \frac{d\omega}{dt} = \frac{d^2\alpha}{dt^2}, \tag{1.7}$$

în care $d\alpha$ este unghiul la centru descris de raza vectoare în timpul dt.

Viteza, accelerația tangențială și normală sînt legate de mărimile unghiulare prin relațiile:

$$v = \omega R, \tag{1.8}$$

$$a_t = \varepsilon R, \tag{1.9}$$

$$a_n = \omega^2 R, \tag{1.10}$$

unde R este raza cercului.

Existînd o analogie perfectă între mișcarea rectilinie și mișcarea circulară, în tabelul 1 sînt date ecuațiile ambelor mișcări.

Tabelul 1

Mișcarea rectilinie	Mișcarea circulară
Ecuațiile mișcării uniforme	
$a = 0,$	$\varepsilon = 0,$
$v = \text{const},$	$\omega = \text{const},$
$s = s_0 + vt.$	$\alpha = \alpha_0 + \omega t.$
Ecuațiile mișcării uniform variate	
$a = \text{const},$	$\varepsilon = \text{const},$
$v = v_0 \pm at,$	$\omega = \omega_0 \pm \varepsilon t,$
$s = s_0 + v_0 t \pm \frac{at^2}{2}.$	$\alpha = \alpha_0 + \omega_0 t \pm \frac{\varepsilon t^2}{2}.$
Ecuațiile mișcării variate	
$s = s(t),$	$\alpha = \alpha(t),$
$v = \frac{ds}{dt},$	$\omega = \frac{d\alpha}{dt},$
$a = \frac{d^2s}{dt^2}.$	$\varepsilon = \frac{d^2\alpha}{dt^2}.$

Mișcarea în cîmp gravitațional este un caz particular al mișcării uniform variate (vezi tabelul 1), în care $a = g$ (g fiind accelerația gravitațională).

Mișcarea armonică a unui punct material este descrisă de ecuația

$$x = A \cos(\omega t + \varphi_0), \tag{1.11}$$

în care A este amplitudinea mișcării, iar $\varphi = \omega t + \varphi_0$ este faza mișcării, φ_0 fiind faza inițială.

Cinematica mișcării relative. Fiind date două sisteme de referință, dintre care unul fix, iar celălalt mobil, atunci mișcarea unui corp față de sistemul mobil se numește *mișcare relativă*. Mișcarea corpului față de sistemul fix se numește *mișcare absolută*, iar mișcarea sistemului de referință mobil, solidar cu corpul, față de sistemul de referință fix, poartă numele de *mișcare de transport*. Elementele cinematice legate de fiecare din aceste mișcări poartă numele mișcării respective (absolută, relativă sau de transport).

Viteza absolută $\vec{v}_a$ a unui corp este dată de relația:

$$\vec{v}_a = \vec{v}_r + \vec{v}_t, \tag{1.12}$$

în care $\vec{v}_r$ este *viteza relativă*, iar $\vec{v}_t = \vec{v}_0 + \vec{\omega} \times \vec{r}$ este *viteza de transport*. Ea se compune din viteza de translație $\vec{v}_0$ și din viteza de rotație $\vec{\omega} \times \vec{r}$, datorită rotației sistemului mobil în jurul axei $\vec{\omega}$.

Accelerația absolută $\vec{a}_a$ a unui corp este:

$$\vec{a}_a = \vec{a}_r + \vec{a}_t + \vec{a}_{cor}, \tag{1.13}$$

în care *accelerația de transport* este

$$\vec{a}_t = \vec{a}_0 + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}) + \vec{\varepsilon} \times \vec{r}, \tag{1.14}$$

iar accelerația Coriolis

$$\vec{a}_{cor} = 2\vec{\omega} \times \vec{v}_r, \tag{1.15}$$

în care $\vec{\varepsilon}$ este accelerația unghiulară.

1.1. Mișcarea uniformă

1.1.1. De la un debarcader pleacă un om cu o barcă, vîslind contra curentului. În același timp se desprinde o șalupă și este dusă de curent. După 20 de minute, omul din barcă observă că s-a desprins șalupa și se întoarce după ea. La cîți kilometri de la debarcader va prinde el șalupa dacă viteza apei este de 3 km/h?

1.1.2. Între două puncte situate pe un rîu la distanța de 15 km navighează o șalupă. Șalupa parcurge această distanță, în sensul curentului, în timp de 3 ore, iar în sens invers curentului, în timp de 5 ore. Să se determine viteza rîului și viteza șalupei.

1.1.3. Un mobil parcurge patru spații egale, fiecare cu vitezele $v_1 = 1$ m/s, $v_2 = 2$ m/s, $v_3 = 3$ m/s și $v_4 = 4$ m/s. Să se determine viteza medie a mobilului pe întreg spațiul parcurs.

1.1.4. Un automobil pleacă dintr-un oraș în altul și parcurge jumătate din drum cu viteza de 60 km/h. Cealaltă jumătate de drum o parcurge astfel încît în prima jumătate de timp merge cu 50 km/h, iar în cea de-a doua jumătate de timp rămasă are viteza de 80 km/h. Să se determine viteza medie cu care a mers automobilul între cele două orașe.

1.1.5. Dintr-un punct O pleacă un mobil cu viteza $v_1 > 0$. După un timp t, la distanța s_0 față de punctul O pleacă un alt mobil cu viteza $v_2 > v_1$. Să se determine după cît timp τ și la ce distanță se vor întîlni cele două mobile. Să se reprezinte grafic spațiile parcurse de mobile în funcție de timp.

1.2. Mișcarea uniform variată

1.2.1. Un schior coboară o pantă parcurgînd 10 m în timp de 2 s, iar în cele 5 secunde următoare parcurge distanța de 30 m. Care este viteza inițială și accelerația schiorului?

1.2.2. Pe două traiectorii perpendiculare pleacă în același timp două mobile, îndreptîndu-se spre încrucișarea lor. Să se determine timpul pentru care distanța dintre cele două mobile este minimă și valoarea distanței minime, dacă se consideră că ambele mobile au o mișcare uniform variată.

1.2.3. Un tren intră într-o stație. Primul vagon trece prin fața șefului de gară, care stă nemișcat, în timp de 3 s, iar al doilea vagon, în timp de 8 s. Dacă primul vagon al trenului s-a oprit la o distanță de 72 m de șeful de gară, să se determine accelerația trenului, dacă vagoanele sînt identice.

1.2.4. Dintr-un punct pleacă un biciclist cu viteza inițială $v_{01} = 2$ m/s și accelerația $a_1 = 3$ m/s^2. La o distanță $d = 18$ m de primul biciclist pleacă în același timp un al doilea biciclist cu viteza inițială $v_{02} = 5$ m/s și accelerația $a_2 = 1$ m/s. După ce interval de timp și la ce distanță primul biciclist îl va întîlni pe al doilea? Cu ce viteze medii se deplasează cei doi bicicliști în acest interval de timp?

1.2.5. Un observator stă în fața vagonului numărul k al unui tren. După ce trenul se pune în mișcare, vagonul m trece prin fața observatorului în timpul t. Cît timp va trece prin fața observatorului vagonul n, dacă trenul se mișcă uniform accelerat și dacă presupunem că toate vagoanele au aceeași lungime?

1.3. Mișcarea în cîmp gravitațional

1.3.1. Un corp este aruncat pe verticală în sus cu viteza inițială v_0. După cît timp t trebuie aruncat vertical în sus un al doilea corp, din același loc, cu viteza inițială $v_1 < v_0$, pentru ca ambele corpuri să se întîlnească în timpul cel mai scurt de la aruncarea primului corp?

1.3.2. Un corp în cădere liberă parcurge a n-a parte din înălțimea totală în timpul ultimei secunde. Să se determine timpul de cădere al corpului.

1.3.3. Un corp care se află la înălțimea $H = 78{,}4$ m de suprafața Pămîntului este lăsat să cadă liber. În același timp este aruncat pe verticală un al doilea corp care se află la o distanță $h = 20$ m de primul. Să se determine viteza inițială cu care trebuie aruncat corpul al doilea pentru ca ambele corpuri să atingă Pămîntul în același timp.

1.3.4. Un corp este aruncat pe verticală, în jos, cu viteza inițială de 19,6 m/s. În ultima secundă parcurge un sfert din înălțimea totală. Să se determine timpul de cădere al corpului, înălțimea de la care este aruncat corpul, precum și viteza cu care acesta cade pe Pămînt.

1.3.5. Un corp cade de la înălțimea h. Să se împartă această înălțime în părți care să fie parcurse în timpuri egale. *Caz particular*: să se împartă înălțimea de 270 m în 3 părți care să fie parcurse în timpuri egale.

1.3.6. Un corp este aruncat vertical, în sus, cu viteza inițială v_0. După ce interval de timp și cu ce viteză corpul se află la o înălțime egală cu a n-a parte din înălțimea maximă. Să se reprezinte grafic viteza și spațiul în funcție de timp.

1.3.7. Două corpuri sînt aruncate vertical, în sus, cu aceeași viteză inițială v_0, la un interval de timp t unul de altul. Să se determine timpul t astfel încît cele două corpuri să se întîlnească la o înălțime egală cu a n-a parte din înălțimea de ridicare. Să se reprezinte grafic dependența spațiului parcurs de cele două mobile în funcție de timp.

1.3.8. Este necesar să atingem o țintă fixă cu un proiectil, aflat la distanța d pe orizontală și la înălțimea h față de punctul de tragere. Ce viteză inițială minimă trebuie să-i imprimăm proiectilului pentru ca acesta să atingă ținta?

1.3.9. O țintă care se află pe un deal este vizată dintr-un punct oarecare de observație sub un unghi $\alpha = 30°$ față de orizontală. Distanța, pe orizontală, dintre țintă și punctul de observație este $d = 1\,730$ m. Să se determine cu ce viteză inițială trebuie aruncat un proiectil din punctul de observație pentru ca acesta să atingă ținta, dacă tragerea are loc sub un unghi $\beta = 60°$ față de orizontală ($g = 10$ m/s^2).

1.3.10. Un corp este aruncat pe orizontală cu viteza inițială de 24 m/s. Să se determine accelerația tangențială și cea normală a corpului după o secundă de la începutul mișcării ($g = 10$ m/s^2).

1.3.11. Un corp este aruncat în sus cu viteza inițială de 19,6 m/s sub un unghi $\alpha = 60°$. Să se determine după cît timp vectorul viteză face cu orizontala un unghi $\beta = 30°$.

1.3.12. Două corpuri sînt aruncate din același punct cu aceeași viteză inițială $v_0 = 3$ m/s sub unghiurile, față de orizontală, $\alpha_1 = 15°$, respectiv, $\alpha_2 = 75°$. Să se determine distanța d dintre corpuri după 3 secunde de la începutul mișcării, dacă vectorii viteză se află în același plan vertical și de aceeași parte față de verticală.

1.3.13. Un corp este aruncat într-un plan vertical în sus cu viteza inițială v_0 sub un unghi α față de orizontală. Înălțimea maximă la care se ridică mobilul este de 14,7 m, punct al traiectoriei unde raza de curbură este de 9,8 m. Să se calculeze viteza inițială v_0 și unghiul de aruncare α al corpului.

1.3.14. Un corp este aruncat cu viteza inițială v_0 sub unghiul α și întîmpină o rezistență din partea aerului proporțională cu viteza. Ecuațiile parametrice de mișcare ale corpului au forma

$$x = \frac{v_0 \cos \alpha}{kg} (1 - e^{-kgt}),$$

$$y = \frac{1}{kg}\left(v_0 \sin \alpha + \frac{1}{k}\right)(1 - e^{-kgt}) - \frac{t}{k},$$

în care k este o constantă. Să se determine: *a*) ecuația traiectoriei; *b*) înălțimea maximă de ridicare a corpului; *c*) spațiul parcurs de mobil pe orizontală.

1.3.15. Un mobil este aruncat cu viteza inițială $v_0 = 10$ m/s sub un unghi $\alpha = 45°$ față de orizontală. Corpul lovește un perete situat la o dis-

tanță $d = 3$ m de punctul de aruncare. Să se determine: *a*) pe ce porțiune a traiectoriei, ascendentă sau descendentă, se produce ciocnirea; *b*) la ce înălțime h are loc ciocnirea; *c*) viteza v pe care o are mobilul în momentul ciocnirii ($g = 10$ m/s^2).

1.3.16. Dintr-un punct fix din spațiu se aruncă simultan, în vid, în toate direcțiile, diferite corpuri, cu aceeași viteză inițială v_0. Să se determine locul geometric pe care se vor găsi corpurile după un timp t din momentul aruncării.

1.3.17. O minge este aruncată cu viteza inițială $v_0 = 10$ m/s sub un unghi α față de orizontală și se lovește de un perete aflat la distanța $d = 2$ m de punctul de aruncare. Dacă se consideră această ciocnire perfect elastică, iar unghiul de reflectare egal cu unghiul de cădere, să se determine sub ce unghi α față de orizontală a fost aruncată mingea ($g = 10$ m/s^2).

1.3.18. Un corp cade de la înălțimea $h = 1$ m față de un plan înclinat cu deschiderea de 30° și se ciocnește elastic de acesta. La ce distanță față de punctul de ciocnire va cădea din nou corpul pe planul înclinat?

1.4. Mișcarea variată

1.4.1. Într-o mișcare variată, dependența spațiului de timp a unui mobil este de forma $s = At - Bt^2 + Ct^3$, în care $A = 1$ m/s, $B = 2$ m/s^2, iar $C = 3$ m/s^3. Să se reprezinte grafic spațiul, viteza și accelerația mobilului în funcție de timp.

1.4.2. Să se construiască graficele spațiului, vitezei și accelerației după 2 secunde de la începutul mișcării unui mobil a cărui accelerație este dată de relația $a = kt$, unde $k = 0{,}1$ m/s^3, dacă la momentul inițial, viteza este nulă, iar spațiul este de 5 m.

1.4.3. Să se determine viteza și spațiul unui mobil a cărui accelerație depinde de viteză după legea $a = -kv^2$, cunoscînd că la $t = 0$, $v = v_0$ și $s = s_0$.

1.4.4. Să se determine dependența spațiului de timp și dependența vitezei de spațiu pentru un mobil a cărui viteză depinde hiperbolic de timp, dacă la momentul $t = t_0$, viteza este v_0.

1.4.5. Un corp se mișcă după legea $s = A^n v^n - B^n$, în care A și B sînt două constante, iar n poate lua orice valoare pozitivă, cu condițiile inițiale $v = v_0$, $s = 0$ la $t = 0$. După cît timp t de la începutul mișcării viteza devine de k ori mai mare decît viteza inițială? a) $n \neq 1$ b) $n = 1$

1.4.6. Într-o mișcare încetinită, viteza în funcție de timp este reprezentată printr-un sfert de elipsă din primul cadran. Cunoscînd viteza inițială și timpul t în care mobilul se află în mișcare, să se determine spațiul parcurs de acest mobil.

1.4.7. Fie o mișcare definită prin ecuațiile parametrice $x = 3e^t + \frac{1}{4}$, $y = 4e^t - 1$. Să se determine traiectoria mobilului, viteza și accelerația sa.

1.4.8. Să se determine ecuația de mișcare pentru o particulă care se află în cîmpul $U(x) = -Ax^4$, dacă energia ei este nulă.

1.4.9. Să se studieze mișcarea unui corp de dimensiuni neglijabile, care este aruncat cu viteza v_0 sub un unghi α față de orizontală, cunoscînd că forța de rezistență întîmpinată de corp din partea aerului este proporțională cu viteza, iar viteza limită de cădere liberă este c.

1.4.10. Traiectoria unui mobil, care are mărimea vitezei constantă, este dată de ecuația

$$y = \frac{a}{2}\left(e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}}\right)$$

Să se determine proiecțiile vitezei și accelerației pe axele de coordonate, accelerația totală în funcție de coordonate și raza de curbură a traiectoriei.

1.4.11. Un punct material M se mișcă după legea $s = \beta e^{kt}$, astfel încît unghiul dintre accelerația totală și accelerația tangențială este constant și egal cu 60°. Să se determine viteza, accelerațiile tangențială, normală și totală ale punctului material, precum și raza de curbură a traiectoriei.

1.4.12. Un punct material M alunecă pe planul înclinat AB cu viteza $v_r = \sqrt{2gy}$, în care y este ordonata punctului (fig. 1.4.12). La momentul inițial, punctul material M se află în poziția A. Planul înclinat se mișcă pe orizontală cu viteza v_t spre dreapta. Să se determine traiectoria punctului M și viteza lui absolută în momentul cînd acesta atinge Pămîntul, dacă înălțimea planului este h.

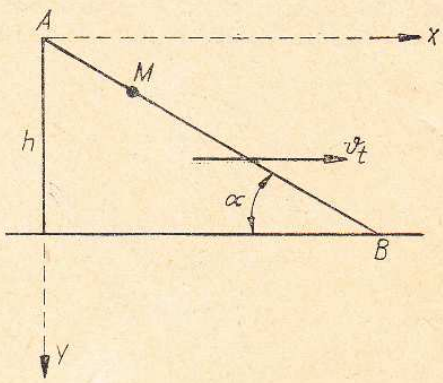


Fig. 1.4.12

1.5. Mișcarea circulară

1.5.1. O roată cu viteza inițială de 2 rotații pe secundă se oprește din cauza frecărilor după 5 ture. Să se determine accelerația unghiulară a roții.

1.5.2. De un scripete, ca cel din figura 1.5.2, este prinsă o greutate G, care pleacă din repaus cu accelerația constantă a. Să se determine viteza și accelerația unui punct P de pe periferia scripetelui în funcție de spațiul h parcurs de greutatea G la momentul t.

1.5.3. Un mobil se mișcă cu viteza inițială v_0 pe un cerc de rază R, astfel încît unghiul α dintre viteză și accelerație rămîne mereu constant. Să se determine viteza mobilului în funcție de timp.

1.5.4. Un mobil se mișcă fără viteză inițială pe un cerc de rază R cu accelerația tangențială constantă. Să se determine accelerația normală, accelerația totală și unghiul φ pe care îl face vectorul accelerației cu raza vectoare.

1.5.5. Un punct material se află pe un cerc de rază R care se rotește fără alunecare pe orizontală cu viteza inițială v_0. Să se studieze această

mișcare, în sensul determinării tuturor elementelor cinematice ale mișcării (mișcarea pe cicloidă).

1.5.6. Un automobil cu raza roții R se mișcă astfel încît viteza lui satisface inegalitatea $v^2 > Rg$. Să se determine înălțimea la care se ridică noroiul ce se dezlipește de pe roată. Pentru ce unghi de desprindere înălțimea este maximă? Care este înălțimea maximă?

1.5.7. Accelerația normală a unui mobil ce se mișcă pe un cerc de rază R este dată de ecuația $a_n = at + b$, în care a și b sînt două constante. Să se determine accelerația tangențială și spațiul parcurs de mobil după t secunde de la începutul mișcării.

1.5.8. Un mobil se mișcă pe o traiectorie circulară de rază R, astfel încît dependența unghiului α descris de raza vectoare în timp este dată de ecuația $\alpha = at^2 + bt + c$. Să se determine elementele cinematice ale mișcării.

1.5.9. O bară $OA = R$ se mișcă în jurul punctului O, în planul figurii, cu unghiul la centru $\alpha = kt$ (vezi fig. 1.5.9). Biela AB de lungime $l > 2R$ este prinsă la capătul A și este trecută printr-un cilindru articulat, care se poate roti în jurul punctului M. Să se determine ecuațiile parametrice

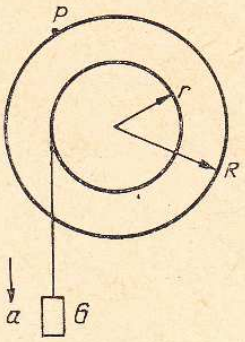


Fig. 1.5.2

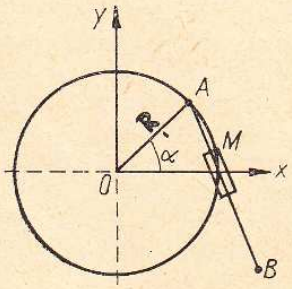


Fig. 1.5.9

de mișcare ale punctului B, proiecțiile vitezei și accelerației pe axele de coordonate, accelerațiile tangențială, totală și normală, precum și raza de curbură a curbei descrise de punctul B. Se vor particulariza rezultatele pentru $\alpha = 0$ și $\alpha = \pi$.

1.5.10. Accelerația oricărui punct de pe o roată, ce se învîrtește în jurul axei sale, face un unghi constant de 60° cu perpendiculara coborîtă din punctul respectiv pe axul roții (vezi fig. 1.5.10). Condițiile inițiale sînt alese astfel încît proiecția vitezei unghiulare pe axa Oz, care coincide cu axa de rotație,

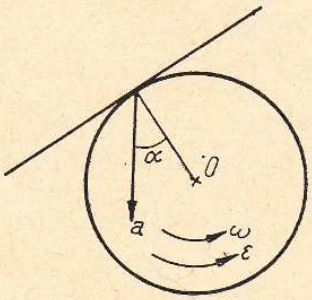


Fig. 1.5.10

este egală cu $-\omega_0$, iar unghiul la centru al razei vectoare cu axa de referință este nul. Să se determine accelerațiile tangențială, normală și totală ale unui punct de pe roată situat la distanța r de centru. Care este ecuația de mișcare a roții în jurul axei și cum depinde viteza unghiulară de unghiul la centru?

1.5.11. O roată dințată *1*, de rază R_1, este cuplată de o altă roată dințată *2*, de rază R_2. Prima roată are viteza unghiulară ω_1 și accelerația unghiulară ε_1. Să se determine viteza și accelerația unghiulară a roții *2* și accelerațiile care apar la contactul celor două roți.

1.5.12. Pentru coborîrea greutății M legate de capătul unui fir (vezi fig. 1.5.12) înfășurat pe tamburul *III*, se trage firul A cu viteza V, înfășurat pe tamburul *1*. Coaxial, pe tamburul *1* de rază r_1 se află o roată dințată *I* de rază R_1. Roata dințată *I* este cuplată cu roata dințată *2* de rază r_2. Aceas-

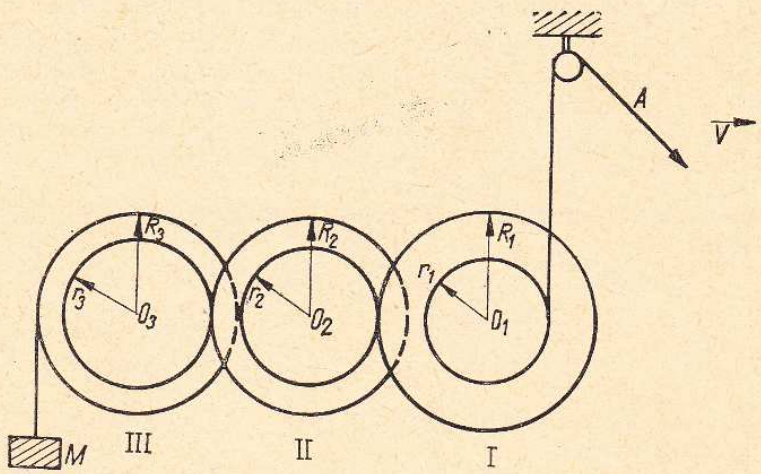


Fig. 1.5.12

ta se rotește solidar cu roata dințată *II* de rază R_2. Aceasta, la rîndul ei, este cuplată de roata dințată *3* de rază r_3, care se rotește solidar cu tamburul *III* de rază R_3. Să se determine viteza cu care coboară greutatea M.

1.5.13. Mișcarea unui mobil este descrisă de ecuațiile parametrice $x = A \cos \omega t$, $y = B \sin \omega t$, în care A, B și ω sînt constante pozitive. Să se determine traiectoria mișcării, viteza mobilului, accelerațiile totală și normală, precum și raza de curbură a traiectoriei.

1.5.14. Mișcarea unui mobil este descrisă de ecuațiile parametrice $x = r \cos \omega t$, $y = r \sin \omega t$, $z = ct$, în care r și c sînt constante pozitive. Să se determine viteza și accelerația mobilului și raza de curbură a traiectoriei.

1.6. Mișcarea oscilatorie armonică

1.6.1. Un punct material se află sub acțiunea a două mișcări perpendiculare, descrise de ecuațiile $x = 10 \cos 3t$ cm, $y = 10 \sin 3t$ cm. Să se determine traiectoria, viteza și accelerația punctului material.

1.6.2. Un punct material execută o mișcare oscilatorie descrisă de ecuațiile parametrice:

$$x = A \cos (2kt - \varphi),$$

$$y = B \cos kt.$$

Să se calculeze: *a*) traiectoria punctului material; *b*) pentru ce valoare a lui φ traiectoria devine o parabolă; *c*) viteza la momentul inițial.

1.6.3. Un punct material execută o mișcare descrisă de ecuația

$$x = 2 \sin^2\left(3\pi t + \frac{\pi}{2}\right).$$

Să se arate că mișcarea este oscilatorie armonică. Să se calculeze amplitudinea și perioada mișcării, viteza și accelerația punctului material.

1.6.4. Prin compunerea a două oscilații armonice de aceeași direcție și de aceeași frecvență se obține o oscilație rezultantă cu amplitudinea de 9 cm. Una din oscilații este descrisă de ecuația $x_1 = 5 \sin 40t$ cm, iar cealaltă are amplitudinea de 7 cm. Să se determine ecuația de mișcare a celei de-a doua oscilații și a mișcării oscilatorii rezultante.

1.6.5. Ecuațiile parametrice de mișcare ale unui punct material sînt date de relațiile:

$$x = a \cos kt,$$

$$y = \frac{g}{k^2}(1 - \cos kt)$$

Să se determine traiectoria și spațiul parcurs în timp, dacă la $t = 0$, $s = 0$ (vezi și paragraful 7.2).

1.7. Compunerile mișcărilor

1.7.1. Într-un rîu cu viteza apei v_2, constantă pe toată lățimea d a rîului, se deplasează o barcă cu viteza constantă v_1. Să se calculeze: *a*) viteza absolută a bărcii; *b*) ce direcție trebuie să ia barca pentru a ajunge pe malul opus, într-un punct situat pe perpendiculara dusă din punctul de plecare pe malul opus al rîului? *c*) Ce direcție trebuie să ia barca pentru ca traversarea rîului să se facă în timpul cel mai scurt?

1.7.2. Pe periferia unui disc de rază R se mișcă un punct material cu viteza constantă în modul, v. Discul se rotește cu viteza unghiulară constantă ω, față de o axă ce trece perpendicular prin centrul său. Să se determine viteza și accelerația absolută a punctului material, dacă acesta se mișcă pe periferia discului în sens invers rotației lui.

1.7.3. Pe periferia interioară a unui disc de rază R, ce se rotește cu viteza unghiulară constantă ω în jurul unei axe perpendiculare pe centrul său, se rotește un punct material pe o rază egală cu $R/2$, cu viteza constantă unghiulară 2ω. Să se determine vitezele și accelerațiile absolute ale punctului material, cînd acesta se află în pozițiile O, A și B (figura 1.7.3. R).

1.7.4. Un cilindru se rotește cu o viteză unghiulară constantă ω în jurul axei Oz. Pe suprafața cilindrului se mișcă punctul material M după ecuațiile:

$$x = 3 \cos 2\pi t,$$

$$y = 3 \sin 2\pi t,$$

$$z = 3t.$$

Sistemul de axe x, y, z este legat de cilindru și se rotește și el cu aceeași viteză unghiulară ω_t în jurul axei Oz. Proiecția vitezei unghiulare pe axa Oz, care coincide cu axa de simetrie a cilindrului, este egală cu $2\ s^{-1}$. Să se determine viteza și accelerația absolută a punctului material M. Cum se modifică acestea dacă viteza unghiulară a cilindrului își modifică numai sensul?

1.7.5. Un mobil se mișcă pe meridianul ABC la latitudinea de 60° de la sud la nord cu o viteză de 10 m/s (vezi fig. 1.7.5). Să se determine viteza și accelerația absolută a punctului material, dacă Pământul se mișcă în jurul axei sale. Să se rezolve problema în cazul în care punctul material se mișcă pe paralela de 60° de la vest la est. Se presupune constantă raza Pământului.

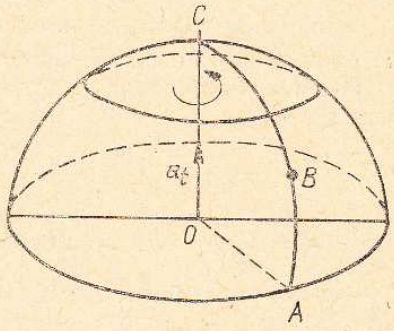


Fig. 1.7.5

$R = 6371 Km$

$\omega = 7{,}3 \cdot 10^{-5} rad/s$

$\omega R \simeq 465 m/s$

Capitolul 2

DINAMICA PUNCTULUI MATERIAL

Ecuația de mișcare a punctului material. Dacă asupra punctului material de masă m acționează un sistem de forțe $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \ldots, \vec{F}_n$, pe baza principiului al II-lea al lui Newton și a principiului independenței acțiunii forțelor, putem scrie

$$\sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i = \vec{R} = m\vec{a}, \tag{2.1}$$

unde $\vec{R} = \sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i$ este rezultanta sistemului de forțe, $\vec{a}$ — accelerația, iar m — masa punctului material ($m = \text{const.} > 0$). Ecuația (2.1) se numește *ecuația vectorială de mișcare* a punctului material. Scrisă în proiecții pe axele sistemului cartezian $Oxyz$, ecuația (2.1) devine

$$m\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2} = R_x, \quad m\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2} = R_y, \quad m\frac{\mathrm{d}^2z}{\mathrm{d}t^2} = R_z, \tag{2.2}$$

unde $\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2} = \ddot{x} = a_x, \frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2} = \ddot{y} = a_y, \frac{\mathrm{d}^2z}{\mathrm{d}t^2} = \ddot{z} = a_z$ sînt proiecțiile vectorului accelerație $\vec{a}$ pe axele de coordonate, iar R_x, R_y și R_z sînt proiecțiile forței rezultante $\vec{R}$ pe aceleași axe. Relațiile (2.2) se numesc *ecuațiile diferențiale de mișcare* a punctului material.

Teorema impulsului. *a*) Sub formă diferențială:

$$\vec{R}\,\mathrm{d}t = \mathrm{d}(m\vec{v}) = \mathrm{d}\vec{p}. \tag{2.3}$$

b) Sub formă integrală:

$$\int_{t_1}^{t_2} \vec{R}\,\mathrm{d}t = \vec{p}_2 - \vec{p}_1 = \Delta\vec{p} = \Delta(m\vec{v}) = m\vec{v}_2 - m\vec{v}_1. \tag{2.4}$$

Produsul $\vec{R}\,\mathrm{d}t$ sau $\int_{t_1}^{t_2} \vec{R}\,\mathrm{d}t$ se numește *impulsul forței*. Produsul $\vec{p} = m\vec{v}$ se numește *cantitate de mișcare* sau *impulsul punctului material*. Dacă impulsul forței rezultante *este nul*, impulsul punctului material *se conservă*.

Teorema momentului cinetic (momentul unghiular). *a)* Sub formă diferențială:

$$\vec{M}\,\mathrm{d}t = \mathrm{d}(\vec{r}\times\vec{p}) = \mathrm{d}\vec{L}. \tag{2.5}$$

b) Sub formă integrală:

$$\int_{t_1}^{t_2} \vec{M}\,\mathrm{d}t = \vec{L}_2 - \vec{L}_1 = \Delta\vec{L} = \Delta(\vec{r}\times\vec{p}). \tag{2.6}$$

Produsul $\vec{M}\,\mathrm{d}t$ sau $\int_{t_1}^{t_2}\vec{M}\,\mathrm{d}t$ se numește *momentul impulsului forței* rezultante.

Produsul $\vec{L}=\vec{r}\times\vec{p}$ se numește *moment cinetic* al punctului material, iar $\vec{M}=\vec{r}\times\vec{R}$ se numește *momentul forței* rezultante (față de o axă sau față de un pol). Dacă momentul forței rezultante *este nul*, momentul cinetic al punctului material *se conservă*.

Lucrul mecanic al forței. *a*) Sub formă diferențială:

$$\mathrm{d}L=\vec{F}\,\mathrm{d}\vec{r}=\vec{F}\vec{v}\,\mathrm{d}t. \tag{2.7}$$

b) Sub formă integrală:

$$L=\int\vec{F}\,\mathrm{d}\vec{r}=\int(F_x\,\mathrm{d}x+F_y\,\mathrm{d}y+F_z\,\mathrm{d}z). \tag{2.8}$$

Dacă forța este constantă ($\vec{F}=\text{const.}$), $L=\vec{F}\Delta\vec{r}=Fd\cos(\vec{F},\vec{d})$, (2.9)

unde $\vec{d}$ este vectorul deplasare a punctului de aplicație al forței.

Putere. *a*) Puterea medie a forței $\vec{F}$:

$$\bar{P}=\frac{\Delta L}{\Delta t}. \tag{2.10}$$

b) Puterea instantanee:

$$P=\frac{\mathrm{d}L}{\mathrm{d}t}=\vec{F}\frac{\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}t}=\vec{F}\vec{v}. \tag{2.11}$$

Teorema energiei cinetice. *a*) În formă diferențială:

$$\vec{R}\,\mathrm{d}\vec{r}=m\vec{v}\,\mathrm{d}\vec{v}=\mathrm{d}\left(\frac{1}{2}mv^2\right)=\mathrm{d}E_c. \tag{2.12}$$

b) În formă integrală:

$$L=\int_1^2\vec{R}\,\mathrm{d}\vec{r}=\left(\frac{1}{2}mv^2\right)=E_c, \tag{2.13}$$

unde $E_c=\frac{1}{2}mv^2=\frac{p^2}{2m}$ este energia cinetică a punctului material. Dacă rezultanta forțelor aplicate punctului material *este nulă*, energia cinetică a punctului material *se conservă*.

Energia potențială E_p a unui punct material, într-un punct fix $P(\vec{r})$, într-un cîmp de forțe conservativ, este egală cu lucrul mecanic efectuat de forțele cîmpului pentru a deplasa punctul material din $P(\vec{r})$ în punctul de referință P_0 (ales, de obicei, la infinit) sau este egală cu minus lucrul mecanic efectuat pentru a aduce punctul material de la infinit (P_0) în punctul considerat P:

$$E_p(\vec{r})=\int_P^{P_0}\vec{F}\,\mathrm{d}\vec{r}=-\int_{P_0}^{P}\vec{F}\,\mathrm{d}\vec{r},\quad \mathrm{d}E_p=-\vec{F}\,\mathrm{d}\vec{r}. \tag{2.14}$$

Lucrul mecanic efectuat de cîmp între două puncte P_1, P_2 va fi egal cu minus variația energiei potențiale a punctului material între acele puncte;

$$L = \int_{P_1}^{P_2} \vec{F}\, d\vec{r} = \int_{P_1}^{P_0(\infty)} \vec{F}\, d\vec{r} - \int_{P_2}^{P_0(\infty)} \vec{F}\, d\vec{r} = E_p(P_1) - E_p(P_2) = -\Delta E_p. \quad (2.15)$$

Cunoscînd energia potențială a punctului material, $E_p(\vec{r})$, putem calcula forțele ce acționează asupra lui din partea cîmpului:

$$F_x = -\frac{\partial E_p}{\partial x}, \quad F_y = -\frac{\partial E_p}{\partial y}, \quad F_z = -\frac{\partial E_p}{\partial z} \quad (2.16)$$

sau

$$\vec{F} = -\text{grad } E_p. \quad (2.17)$$

Conservarea energiei mecanice. Într-un cîmp de forțe conservativ

$$L = \int \vec{F}\, d\vec{r} = \Delta E_c = E_{c2} - E_{c1} = -\Delta E_p = E_{p1} - E_{p2}$$

sau $\Delta E_c + \Delta E_p = \Delta(E_c + E_p) = 0$, deci $E_c + E_p = \text{const.}$, unde $E = E_c + E_p$ este energia mecanică a punctului material.

2.1. Determinarea forțelor dacă este cunoscută mișcarea punctului material

2.1.1. Ecuațiile parametrice ale traiectoriei unui punct material de masă m sînt $x = at$, $y = bt$, unde a și b sînt constante. Să se determine forța ce acționează asupra punctului material.

2.1.2. Un punct material de masă m descrie curba $y = ax^2 + b$, a și b fiind constante. Proiecția vitezei pe axa Oy, $v_y = v_0$, este constantă. Să se determine forța care acționează asupra punctului dacă la $t = 0$, $y = 0$.

2.1.3. Un punct material de masă m se mișcă pe o elipsă dată de ecuația $\frac{x^2}{A^2} + \frac{y^2}{B^2} = 1$, unde A și B sînt semiaxele elipsei. În timpul mișcării, accelerația a este paralelă cu axa Oy: $a = a_y$, $a_x = 0$. La începutul mișcării: $t = 0$, $x = 0$, $y = B$ și viteza inițială este v_0. Să se determine forța care acționează asupra punctului.

2.1.4. Un punct material de masă m se mișcă pe o traiectorie dată de ecuațiile $x = A \cos kt$ și $y = B \sin kt$. Să se determine forța F care produce această mișcare dacă este cunoscut că forța depinde numai de poziția punctului.

2.1.5. Mișcarea unui punct material de masă m față de un sistem de axe de coordonate cilindrice este descrisă de ecuațiile

$$\rho = \rho_0 + \dot{\rho}_0 t, \quad \varphi = \varphi_0 + \dot{\varphi}_0 t, \quad z = z_0 + \dot{z}_0 t.$$

Să se afle traiectoria mișcării și forța F sub acțiunea căreia se mișcă corpul. Se vor considera trei cazuri particulare: *a)* $\dot{\rho}_0 = 0$, $\dot{\varphi}_0 \neq 0$, $\dot{z}_0 \neq 0$; *b)* $\dot{\varphi}_0 = 0$; $\dot{\rho}_0 \neq 0$, $\dot{z}_0 \neq 0$; *c)* $\dot{z}_0 \neq 0$, $\dot{\varphi}_0 \neq 0$, $\dot{\rho}_0 \neq 0$, $\rho_0 = \varphi_0 = z_0 = 0$.

2.1.6. Un corp punctiform de masă m se mișcă pe o hiperbolă echilateră $xy = k^2$ (k = const.) avînd viteza v constantă în tot timpul mișcării. Să se determine forța care acționează asupra corpului.

2.1.7. Un corp avînd greutatea G coboară pe un plan înclinat, avînd unghiul de înclinare α. Ecuațiile ce descriu mișcarea corpului sînt $x = Agt^2$, $y = 0$, unde g este accelerația gravitațională, iar A un coeficient constant. Să se afle valoarea forței de frecare a corpului cu planul. Axa $ox \parallel$ planul; axa $oy \perp$ plan

2.1.8. Un corp punctiform de masă m se mișcă în sus pe un plan înclinat avînd unghiul α, prin tragere cu un cablu paralel cu planul. Să se determine tensiunea ce ia naștere în cablu: *a*) la punerea corpului în mișcare dacă, plecînd din repaus, corpul atinge viteza v în timpul τ; *b*) la mișcarea uniformă a corpului pe plan. Coeficientul de frecare este μ.

2.1.9. Cabina unui ascensor (considerat punct material) avînd greutatea $G = 800$ N coboară cu accelerația $a = 0{,}4\ g$, unde $g = 9{,}81$ m/s² este accelerația căderii libere. Să se determine valoarea tensiunii T ce ia naștere în cablul ce susține cabina, cunoscînd că forța de frecare ce se opune mișcării este $F_f = 0{,}2\ G$.

2.1.10. Mișcarea unei bărci de masă m este descrisă de ecuația $x = \frac{mv_0}{A} \times \times \left(1 - e^{-\frac{A}{m}t}\right)$, unde v_0 — viteza inițială, A — constantă. Să se determine forța de rezistență pe care o întîmpină barca la mișcarea în apă, dacă este cunoscut că această forță depinde numai de viteza bărcii.

2.2. Determinarea mișcării punctului material dacă se cunosc forțele ce acționează asupra lui

2.2.1. Asupra unui corp de masă $m = 2$ kg acționează două forțe, $F_1 = 3$ N și $F_2 = 4$ N, care fac unghiurile $\alpha_1 = 60°$, respectiv, $\alpha_2 = 120°$ cu direcția vitezei $\vec{v}_0$. Să se afle accelerația corpului, a, viteza, v și spațiul parcurs după timpul $t = 10$ s de la începutul mișcării (v_0 se consideră egală cu 20 m/s).

2.2.2. Un corp de masă m se mișcă pe un plan orizontal sub acțiunea unei forțe constante $\vec{F}$. Coeficientul de frecare dintre corp și plan este μ. Să se stabilească ecuația de mișcare dacă la momentul $t = 0$, corpul are viteza $\vec{v}_0$ astfel: *a*) $\vec{v}_0$ are aceeași direcție și sens cu $\vec{F}$; *b*) $\vec{v}_0$ face unghiul α cu $\vec{F}$.

2.2.3. Un corp se mișcă în sus pe un plan înclinat, după care coboară înapoi. Corpul are viteza inițială paralelă cu planul înclinat. Să se determine: *a*) raportul dintre timpul de urcare t_u și timpul de coborîre t_c, dacă spațiul parcurs în cele două mișcări este același; *b*) raportul dintre viteza inițială și cea finală. Se dau: coeficientul de frecare dintre corp și plan, $\mu = 0{,}2$ și unghiul de înclinare al planului, $\alpha = 45°$.

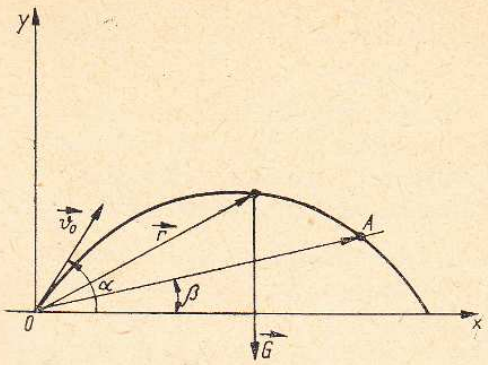


Fig. 2.2.4

2.2.4. Un punct material de masă m este lansat din O cu viteza inițială $\vec{v}_0$ ce face un unghi α cu orizontala. Mișcarea făcîndu-se în vid se cer: *a*) distanța OA dintre punctul de lansare O și punctul A de pe traiectorie, ce se vede sub un unghi β din O; *b*) timpul necesar pentru a ajunge din O în A; *c*) unghiul α, astfel ca, pentru un unghi β dat, distanța OA să fie maximă (fig. 2.2.4).

2.2.5. Să se afle numărul maxim de vagoane pe care o locomotivă le poate transporta în mișcare uniformă pe o pantă de înclinare $\sin \alpha = 0{,}025$, dacă se cunoaște că: 1) greutatea locomotivei G este de trei ori mai mare decît greutatea P a unui vagon; 2) coeficientul maxim de frecare statică dintre roțile locomotivei și șine este $\mu_2 = 0{,}1$; 3) coeficientul de frecare la alunecare este $\mu_1 = 0{,}001$.

2.2.6. Un punct material greu se mișcă cu frecare pe un cerc vertical. La momentul inițial, el se află la o extremitate a diametrului orizontal și are viteza inițială zero. El atinge cel mai coborît punct de pe cerc de asemenea cu o viteză egală cu zero. Să se determine coeficientul de frecare μ dintre corp și cerc.

2.2.7. Un corp punctiform de masă m aflat în repaus pe o suprafață orizontală netedă începe să se miște sub acțiunea unei forțe orizontale $F_x = F = A \sin kx$, unde A și k sînt constante. Să se afle ecuația de mișcare a corpului.

2.2.8. Forța de tracțiune dezvoltată de motorul unui automobil depinde liniar de timp, $F = kt$. Forța de rezistență la înaintarea automobilului este constantă și egală cu: $F_f = nG$, unde G — greutatea automobilului, n — constant. Să se afle spațiul parcurs într-o mișcare rectilinie plană, în direcția forței de tracțiune, dacă se cunosc: masa automobilului $m = 4$ t, coeficientul $k = 1\,200$ N/s, coeficientul $n = 0{,}2$, viteza inițială $v_0 = 0$, $g = 10$ m/s^2.

2.2.9. Să se stabilească traiectoria de mișcare a unei particule de masă m și sarcină electrică e, dacă particula intră într-un cîmp electric omogen cu intensitate variabilă în timp $E = A \cos kt$ (A și k constante), cu viteza $\vec{v}_0$ perpendiculară pe direcția intensității cîmpului. În cîmp electric, asupra particulei acționează forța $\vec{F} = -e\vec{E}$. Se neglijează forța de greutate a particulei.

2.2.10. Un corp de masă m, avînd viteza inițială v_0, se află sub acțiunea unei forțe de frecare a cărei proiecție pe direcția mișcării este $F_x = -A\dot{x} - B\dot{x}^2$, unde $\dot{x}$ este viteza corpului în direcția mișcării, A și B — constante. Considerînd mișcarea rectilinie și orizontală, să se afle intervalul τ după care viteza se micșorează de $n = 3$ ori și spațiul parcurs în acest interval.

2.2.11. Un corp de masă m este lansat pe verticală în sus cu viteza inițială v_0. Să se determine înălțimea H la care viteza corpului se micșorează de $n = 2$ ori, dacă rezistența opusă de aer în direcția mișcării este $R = -m k^2 \dot{x}^2$, unde m — masa, k — coeficient constant, $\dot{x}$ — viteza corpului.

2.2.12. Un punct material de masă m, aflat la înălțimea h deasupra Pământului, este lansat în direcție orizontală cu viteza v_0. Considerînd forța de rezistență a aerului $\vec{K} = -k m \vec{v}$, unde k — constantă, m — masa corpului, $\vec{v}$ — vectorul viteză, să se stabilească traiectoria de mișcare.

2.2.13. Un corp punctiform de masă m poate să se miște rectiliniu (în lungul axei Ox, de exemplu). Asupra lui acționează o forță de respingere, îndreptată în lungul aceleiași axe, în sens pozitiv, egală cu $F = k^2 m x$, unde k — coeficient constant, x — abscisa corpului. La momentul inițial, corpul se află în repaus la distanța d de originea axei de mișcare. Să se afle ecuația spațiului parcurs de corp cînd: *a*) între corp și plan nu există frecare; *b*) între corp și plan există frecare caracterizată de coeficientul de frecare $\mu = \text{const}$.

2.2.14. Se dă sistemul din figura 2.2.14. La momentul inițial, resortul nu este deformat, iar corpului de masă m i se imprimă viteza inițială v_0 în sensul pozitiv al axei Ox. Drept origine a axei Ox este ales capătul din dreapta al resortului nedeformat. Să se afle deformația maximă a resortului, cunoscînd că forța elastică are expresia $F_x = -Ax - Bx^3$, unde x — deformarea resortului, A și B — constante pozitive. Se neglijează masa resortului și frecările.

2.2.15. Un punct material de masă m se mișcă într-un plan vertical sub acțiunea greutății și a unei forțe centrale de atracție, proporțională cu distanța de la punct la centrul fix: $\vec{F} = -k^2 m \vec{r}$, unde $\vec{r}$ — raza vectoare a poziției punctului, k — coeficient constant. Să se afle traiectoria punctului dacă la momentul inițial se afla în poziția $x_0 = a$, $y_0 = -\frac{g}{k^2}$, iar viteza inițială v_0 este îndreptată pe verticală în sus (fig. 2.2.15).

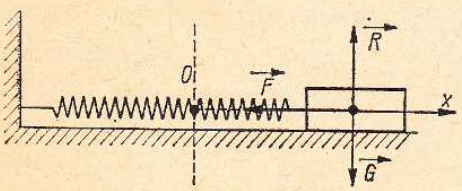


Fig. 2.2.14

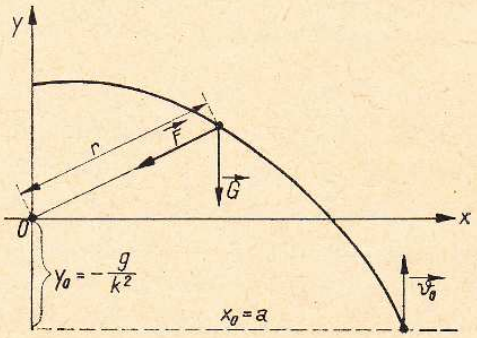


Fig. 2.2.15

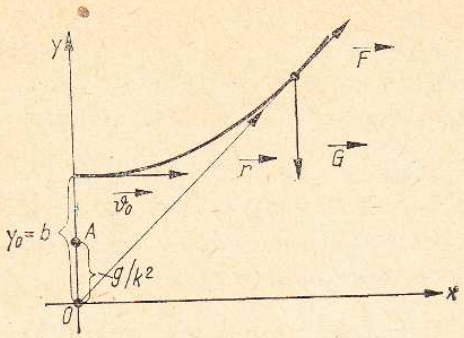


Fig. 2.2.16

2.2.16. Un punct material de masă m se mișcă într-un plan vertical sub acțiunea greutății și a unei forțe centrale de respingere, proporțională cu distanța de la punctul material la centrul fix: $\vec{F} = k^2 m \vec{r}$, unde $\vec{r}$ — raza vectoare a poziției punctului, k — coeficient constant. Să se afle traiectoria punctului dacă la momentul inițial se afla în poziția $x_0 = 0$, $y_0 = b$, iar viteza inițială v_0 este îndreptată pe orizontală ca în figura 2.2.16.

2.3. Mișcarea sistemului format dintr-un număr mic de puncte materiale

2.3.1. Se dă sistemul din figura 2.3.1. în care corpurile de masă $m_1 = m_2 = 1$ kg sînt considerate puncte materiale, iar între corpul *2* și plan există frecare ($\mu = 0{,}1$). Să se determine: *a*) accelerația sistemului a și tensiunea T ce ia naștere în firul ce leagă între ele cele două corpuri, dacă acesta este inextensibil și imponderabil; *b*) forța ce acționează asupra axului scripetelui (masa scripetelui și frecarea în scripete se neglijează) cînd sistemul lăsat liber se mișcă (se consideră $g = 10$ m/s^2).

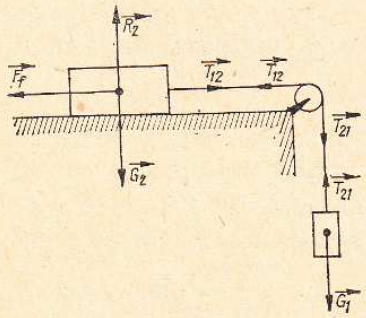


Fig. 2.3.1

2.3.2. Se dă sistemul din figura 2.3.2 în care corpurile de masă M, m_1, m_2 și m_3 sînt puncte materiale. Să se determine: 1) accelerația a a sistemului în mișcare; 2) tensiunile T_1, T_2 și T_3 din fire, dacă firele sînt inextensibile și imponderabile, masa și frecarea în scripete neglijabile, iar între corpurile *1*, *2*, *3* și planul orizontal, coeficientul de frecare este μ.

2.3.3. Peste un scripete de masă neglijabilă și fără frecări este trecut un fir la capetele căruia sînt atîrnate două corpuri de mase egale $m_1 = m_2 = m = 250$ g. Peste una din mase se așază o greutate adițională $\Delta m = 5$ g (mașina Atwood). Să se afle: *a*) accelerația a cu care se mișcă sistemul; *b*) tensiunea T din fir; *c*) forța de apăsare (R) asupra axului scripetelui cînd sistemul se mișcă și (R_0) cînd firul cu scripetele este imobilizat, precum și diferența $R_0 - R$; *d*) forța f cu care apasă masa adițională Δm asupra corpului pe care este așezată.

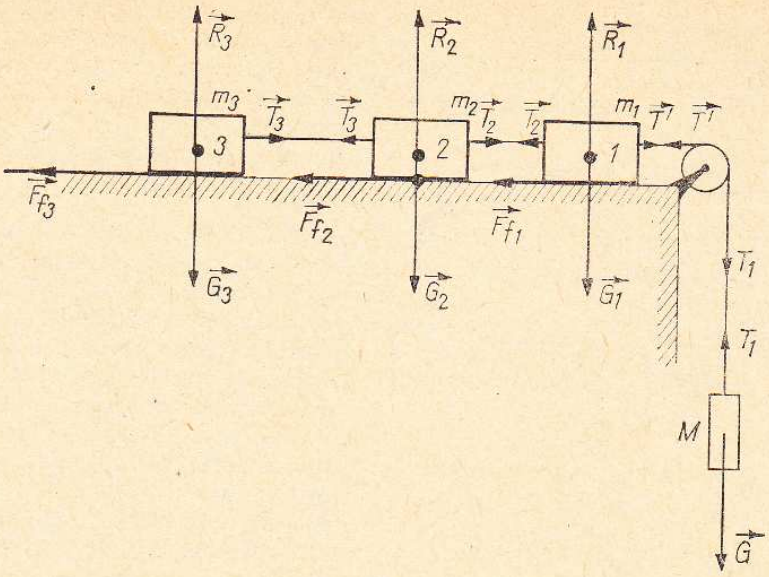


Fig. 2.3.2

2.3.4. Să se afle accelerațiile a_1, a_2, a_3 ale maselor m_1, m_2, m_3 și tensiunile T_1, T_2, T_3 din firele de legătură ale sistemului din figură ($m_1 > m_2 + m_3$, $m_2 > m_3$). Scripeții A și B au mase neglijabile, iar firele sînt inextensibile și au masa neglijabilă.

2.3.5. Peste un scripete de masă neglijabilă este trecut un fir. La un capăt este fixat un corp punctiform de masă m_1, iar de-a lungul celuilalt capăt alunecă un inel de masă m_2 cu accelerația a_2 față de fir. Să se afle accelerația a_1 a masei m_1 și forța de frecare f dintre inel și fir. Masa firului se neglijează.

2.3.6. Peste un scripete de masă neglijabilă este trecută o frînghie inextensibilă de capetele căreia se agață doi sportivi de masă m_1 și m_2 ($m_1 > m_2$). Sportivii încep să urce pe sfoară cu accelerațiile a_1, respectiv, a_2 față de sfoară. Să se afle: *a*) tensiunea T din sfoară; *b*) accelerația a a sforii; *c*) accelerațiile w_1 și w_2 ale sportivilor față de pămînt.

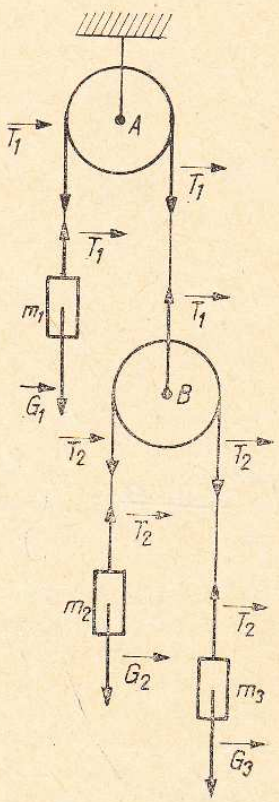


Fig. 2.3.4

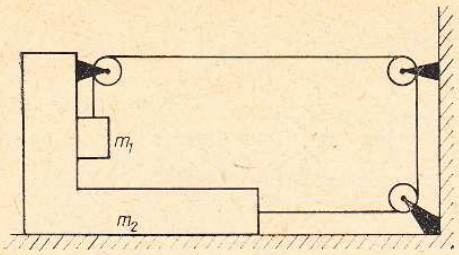


Fig. 2.3.7

2.3.7. Să se determine acceleraţiile a_1 şi a_2 cu care se mişcă cele două corpuri de masă m_1 şi m_2, precum şi forma traiectoriei mişcării corpului m_1 pentru sistemul din figură. Se neglijează frecările şi masa scripeţilor.

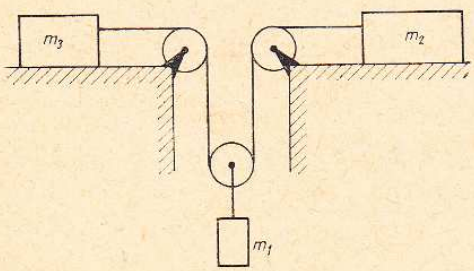


Fig. 2.3.8

2.3.8. Se dau trei corpuri de masă m_1, m_2 şi m_3 legate între ele ca în figura 2.3.8. Coeficientul de frecare dintre corpul de masă m_2 şi planul orizontal este μ_1, iar dintre corpul de masă m_3 şi plan este μ_2. Masa scripeţilor şi a firului inextensibil se neglijează, cît şi frecările în scripeţi. Să se afle: *a*) tensiunea T din fir şi acceleraţiile a_1, a_2 şi a_3 ale celor trei corpuri; *b*) rezultatele obţinute să se particularizeze pentru $m_1 = m_2 = m_3 = m = 1$ kg, $\mu_1 = \mu_2 = \mu = 0{,}2$, $g = 10$ m/s^2.

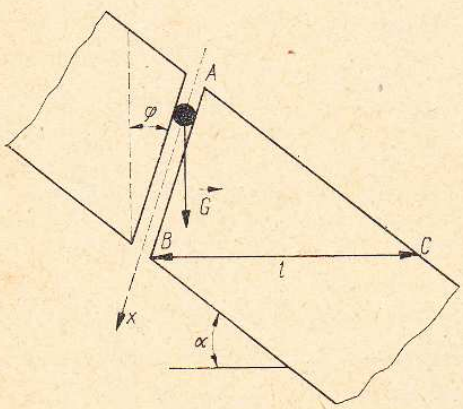


Fig. 2.3.9

2.3.9. Printr-o scîndură care formează unghiul α cu orizontala urmează să se realizeze un canal drept AB, astfel încît un punct material lansat fără viteză iniţială, la deschiderea superioară a canalului, să treacă prin scîndură în timpul cel mai scurt (fig. 2.3.9). Neglijînd frecarea, să se determine sub ce unghi φ faţă de verticală trebuie executat acest canal.

2.3.10. Cu ce acceleraţie trebuie să coboare un automobil de masă M pe o scîndură de masă m, aşezată pe un plan înclinat de unghi α, pentru ca scîndura să urce uniform pe planul înclinat? Coeficientul de frecare la ~~rostogolire~~ dintre automobil şi scîndură este μ_1, iar coeficientul de frecare dintre scîndură şi plan este μ_2.

2.3.11. Pe un plan orizontal se află o pană de masă M, de unghi α, peste care se aşază un corp de masă m. Coeficientul de frecare dintre corp şi pană este μ. Neglijînd frecările dintre pană şi planul orizontal să se afle: 1) acceleraţiile a şi A ale celor două corpuri; 2) forţele R şi N cu care apasă corpul asupra penei, respectiv, pana asupra planului; 3) să se particularizeze rezultatele obţinute la 1) şi 2) pentru $\mu = 0$.

2.3.12. La capătul de sus al unui plan înclinat de unghi α este fixat un scripete de masă neglijabilă peste care este trecut un fir inextensibil. La un

capăt al firului este legat un corp de masă m așezat pe planul înclinat, iar la celălalt capăt atîrnă un alt corp de masă M. Coeficientul de frecare dintre corp și plan este μ. Sistemul fiind lăsat liber, să se determine accelerația celor două corpuri a și tensiunea T din fir. Să se discute posibilitățile de mișcare.

2.3.13. Variind unghiul de înclinare al unui plan înclinat s-a găsit că un corp așezat pe acest plan rămîne în repaus pînă la un unghi maxim $\varphi = 30°$. Fixînd acum înclinarea planului la un unghi $\alpha = 36°$ s-a găsit că viteza limită de lunecare a corpului în jos pe plan atinge valoarea $c = 1{,}75$ m/s, forța de rezistență fiind proporțională cu viteza corpului. Să se calculeze: *a*) timpul T în care corpul lăsat liber pe plan fără viteza inițială atinge jumătate din viteza sa limită: *b*) spațiul parcurs de corp în acest timp; *c*) cantitatea de căldură degajată pe unitatea de masă a corpului, datorită frecărilor cu aerul, în timpul de mai sus.

2.3.14. Două corpuri punctiforme de masă $m_1 = m_2 = m = 1$ kg sînt legate printr-un fir trecut peste un scripete, de masă neglijabilă, fixat în vîrful unui unghi diedru. Corpurile sînt așezate pe fețele diedrului care fac unghiurile $\alpha = 30°$ și $\beta = 45°$ cu planul orizontal. Să se afle: *a*) accelerația mișcării corpurilor; *b*) tensiunea din fir. Coeficientul de frecare a corpurilor pe fețele diedrului este același și egal cu $\mu = 0{,}1$; frecarea în scripete se neglijează.

2.3.15. Variind înclinarea unui plan înclinat s-a găsit că un corp așezat pe acest plan rămîne în repaus pînă la un unghi maxim $\varphi = 30°$. Fixînd înclinarea la unghiul $\alpha = 45°$ s-a găsit că viteza limită pe care o atinge corpul, mișcîndu-se în jos pe plan, atinge valoarea $c = 4$ m/s, iar forța de rezistență a aerului este proporțională cu pătratul vitezei corpului. Lansînd acum corpul în sus pe planul înclinat, cu viteza inițială $v_0 = 2$ m/s ($\alpha = 45°$), să se afle: 1) spațiul S parcurs de corp în mișcarea sa în sus pe plan pînă la oprire și 2) viteza v_f cu care revine corpul la baza planului.

2.4. Impuls. Momentul cinetic (momentul impulsului)

2.4.1. Un punct material de masă m se mișcă uniform pe o traiectorie circulară cu viteza v sub acțiunea unui sistem de forțe. Să se determine impulsul forței rezultante a sistemului de forțe cînd punctul material se mișcă din punctul A în punctul B (fig. 2.4.1).

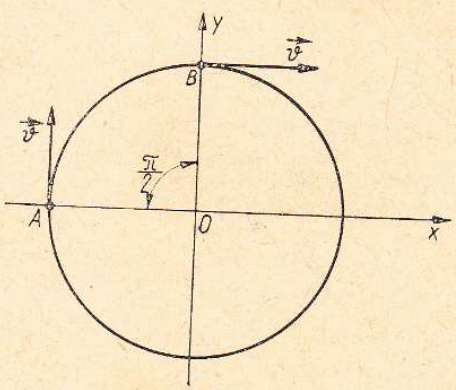


Fig. 2.4.1.

2.4.2. Molecula unui gaz, de masă $m = 4{,}65 \cdot 10^{-26}$ kg se ciocnește de peretele vasului sub un unghi $\varphi = 60°$ față de normala la perete și este respinsă sub același unghi fără a-și schimba valoarea vitezei. Să se afle im-

pulsul forței (considerată constantă) cu care peretele acționează asupra moleculei în timpul ciocnirii. Viteza moleculei este $v = 600$ m/s.

2.4.3. Un tren se mișcă rectiliniu pe o porțiune orizontală. La frînarea trenului se dezvoltă o forță $R = 0{,}1\ G$, unde G este greutatea trenului. La începutul frînării, viteza trenului este $v_1 = 72$ km/h. Să se afle timpul în care trenul se oprește și spațiul parcurs.

2.4.4. Un corp punctiform de masă m coboară pe un plan înclinat de unghi $\alpha = 30°$. Coeficientul de frecare dintre corp și plan este $\mu = 0{,}1$. La momentul inițial, viteza corpului este $v = 1$ m/s. După ce interval de timp viteza corpului se dublează?

2.4.5. Un corp punctiform de masă m, aflat în repaus pe un plan orizontal, începe să se miște sub acțiunea unei forțe proporționale cu timpul ($F = kt$). Să se determine viteza corpului la momentul τ, dacă coeficientul de frecare dintre corp și plan este μ. Să se calculeze v pentru $m = 2$ kg, $k = 2$ N/s, $\tau = 2$ s, $\mu = 0{,}1$.

2.4.6. Pentru determinarea masei unui tren de marfă, între locomotivă și primul vagon s-a intercalat un dinamometru. Într-un interval $\tau = 2$ minute, dinamometrul a indicat o forță medie, $F = 10^5$ N. În acest timp, trenul a atins viteza $v = 57{,}6$ km/h, plecînd din repaus. Coeficientul de frecare este $\mu = 0{,}1$. Să se calculeze masa trenului. (fără locomotivă?)

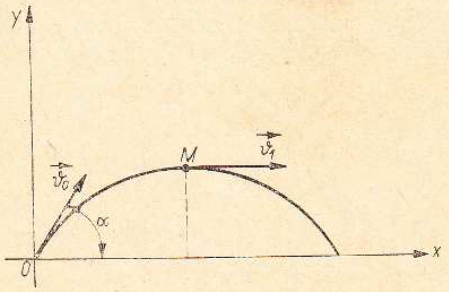


Fig. 2.4.7

2.4.7. Să se afle impulsul forței rezultante ce acționează asupra unui punct material în timpul cît corpul se mișcă din O în M (fig. 2.4.7). Se dau: $v_0 = 500$ m/s, $\alpha = 60°$, $v_1 = 200$ m/s, masa corpului $m = 100$ kg.

2.4.8. Să se afle legile și perioada de oscilație ale unui pendul matematic de lungime l. În momentul inițial, pendulului aflat în poziție de echilibru i s-a imprimat viteza unghiulară $\dot{\varphi}_0$.

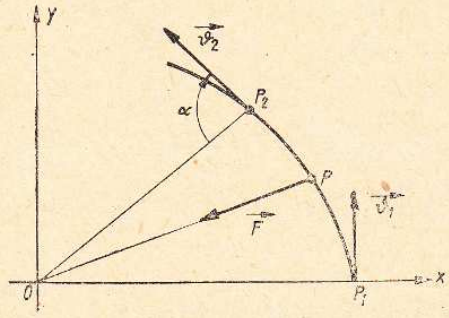


Fig. 2.49.

2.4.9. Un punct material se mișcă pe un plan orizontal fără frecare sub acțiunea unei forțe centrale $\vec{F}$, a cărei direcție trece mereu prin punctul O. Să se afle viteza v_2 a corpului cînd acesta se află în punctul P_2. În punctul P_1, viteza corpului $v_1 = 4$ m/s, iar $OP_1/OP_2 = 3/2$ și unghiul $\alpha = 60°$ (fig. 2.4.9).

2.5. Lucrul mecanic, putere, energie

2.5.1. Să se calculeze lucrul mecanic al tuturor forțelor ce acționează asupra unui corp de masă $m = 10$ kg ce se mișcă în sus pe un plan înclinat, cu unghiul de înclinare $\alpha = 45°$ și parcurge distanța $s = 2$ m în timpul $t = 2$ s, coeficientul de frecare dintre corp și plan fiind $\mu = 0{,}1$.

2.5.2. Să se calculeze lucrul mecanic necesar pentru ca un corp cu masa $m = 5$ t, aflat la suprafața Pămîntului, să fie lansat în spațiul interplanetar. Se consideră $g = 10$ m/s^2 = const, raza Pămîntului $R_p = 6\,370$ km.

2.5.3. Să se calculeze puterea dezvoltată de motorul unui automobil cu masa $m = 1$ t, dacă este cunoscut că automobilul se mișcă cu viteză constantă $v = 36$ km/h: *a*) pe un drum orizontal; *b*) urcă o șosea înclinată cu o înclinare de 5 m la fiecare 100 m de drum; *c*) coboară aceeași șosea. Coeficientul de frecare este $\mu = 0{,}07$.

2.5.4. Un automobil cu masa $m = 1$ t coboară cu motorul oprit o șosea înclinată, cu o viteză constantă $v = 54$ km/h. Înclinarea șoselei este de 4m la 100 m de drum. Ce putere trebuie să dezvolte motorul pentru ca automobilul să urce aceeași șosea cu aceeași viteză?

2.5.5. Un corp punctiform de masă m este fixat la capătul unui resort vertical. Celălalt capăt al resortului este fix. Să se afle distanța maximă pe care coboară corpul, dacă în momentul inițial, viteza lui este zero și resortul nu este întins.

2.5.6. Un corp material punctiform este lansat oblic cu viteza inițială v_0. Să se afle viteza corpului în momentul cînd acesta se află la înălțimea h deasupra solului. Frecările cu aerul se neglijează.

2.5.7. Un corp cade pe Pămînt de la o înălțime H foarte mare. Să se determine viteza corpului cînd acesta atinge suprafața Pămîntului, neglijînd frecarea cu aerul.

2.5.8. O barcă cu motor de masă m se mișcă rectiliniu cu viteza v_0. 1) Să se afle dependența vitezei bărcii de timp în apă stătătoare, după oprirea motorului, dacă rezistența pe care o întîmpină din partea apei este proporțională cu pătratul vitezei. 2) Cît timp se va mișca barca? 3) Să se afle spațiul parcurs pînă la oprire. 4) Să se arate că lucrul mecanic total al forței de frecare este egal cu energia cinetică inițială a bărcii.

2.5.9. Asupra unui corp punctiform de masă $m = 1$ kg acționează forța ce are valoarea instantanee $\vec{F} = 2y^2\,\vec{i} + 3x^2\vec{j} - (x^2 + y^2)\,\vec{k}$ (N). La momentul inițial, corpul se afla în poziția $M(2, 3, 0)$ și avea viteza $\vec{v}_0 = 3\vec{j} + \vec{k}$ (m/s). Să se afle la $t = 0$: *a*) forța $\vec{F}_0$ ce acționează asupra corpului; *b*) accelerația corpului $\vec{a}_0$; *c*) energia cinetică E_{c0}; *d*) viteza de variație a energiei cinetice.

2.5.10. Un punct material se mișcă din $M_1(0, -1, 0)$ în $M_2(0, 1, 0)$, fără frecare, sub acțiunea unei forțe $\vec{F}$ identice cu cea din problema 2.5.9 și a unei forțe ce-l menține pe traiectorie. Să se afle lucrul mecanic efectuat de forța $\vec{F}$ dacă: *a*) corpul se mișcă de-a lungul axei Oy; *b*) corpul se mișcă pe un cerc în planul zOy. Este cîmpul forței $\vec{F}$ conservativ?

2.5.11. Un corp punctiform de masă $m = 1$ kg se află sub acțiunea unei forțe paralele cu planul xOy, $\vec{F} = 4\vec{i} - 5\vec{j}$. Să se calculeze: *a*) lucrul mecanic al forței $\vec{F}$ cînd corpul se deplasează din originea sistemului de coordonate în punctul M $(-2, 4, 6)$; *b*) puterea medie dacă deplasarea se face în timpul $\tau = 0{,}1$ s; *c*) energia cinetică a corpului în originea sistemului de coordonate și în punctul M; *d*) variația energiei potențiale a corpului la deplasarea sa între cele două puncte.

2.5.12. Să se stabilească forma suprafețelor echipotențiale: *a*) pentru cîmpul gravitațional terestru în apropierea suprafeței Pămîntului ($\vec{G} = m\vec{g}$, $|\vec{g}| = \text{const}$); *b*) pentru cîmpul forțelor newtoniene $\left(\vec{F} = -\frac{km}{r^3}\vec{r}$, unde k este un coeficient de proporționalitate constant$\right)$.

2.5.13. Un corp punctiform de masă m se mișcă pe o traiectorie circulară de rază R sub acțiunea unei forțe centrale de atracție $F = -k/r^2$ a cărei direcție trece prin centrul cercului, iar $k = \text{const}$. Să se calculeze: *a*) energia cinetică a corpului; *b*) energia potențială; *c*) energia totală; *d*) momentul cinetic.

2.5.14. Doi protoni, avînd fiecare energia cinetică $E_c = 8 \cdot 10^{-11}$ J, se mișcă unul spre celălalt. Să se calculeze distanța R pînă la care se pot apropia, dacă între ei se manifestă forțe de respingere de natură electrostatică, de forma $F = k\frac{e^2}{r^2}$, unde $k = 9 \cdot 10^9$, $e = 1{,}6 \cdot 10^{-19}$ C, r — distanța dintre cele două particule.

2.5.15. Energia potențială de interacțiune dintre doi nucleoni se poate exprima, suficient de precis, prin relația stabilită de fizicianul japonez H. Yukawa: $E_p(r) = -E_{p0}\left(\frac{r_0}{r}\right)\exp\{-r/r_0\}$, unde $E_{p0} \simeq 8 \cdot 10^{-12}$ J, $r_0 \simeq 1{,}5 \times 10^{-13}$ cm și r distanța dintre nucleoni. *a*) Să se găsească expresia forței de interacțiune $\vec{F}(r)$ dintre nucleoni. *b*) Să se calculeze valoarea acestei forțe $|\vec{F}(r_0)|$ pentru $r = r_0$.

2.5.16. Un corp punctiform (particulă) de masă m participă la o mișcare unidimensională într-un cîmp potențial $U(x)$, reprezentat grafic în figura 2.5.16, *a*. Să se determine: *a*) pozițiile de echilibru (stabil și instabil) ale

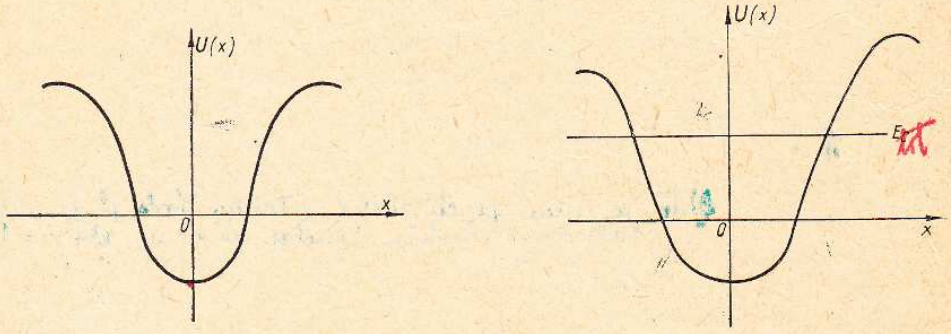


Fig. 2.5.16

particulei; *b*) presupunînd că energia cinetică a particulei E_c are valoarea conform reprezentării grafice din figura 2.5.16, *b*, să se stabilească coordonatele între care se poate mișca particula și perioada T a mișcării.

2.5.17. Două resorturi de constante elastice k_1 și k_2 sînt legate în serie, avînd un capăt fix. La capătul liber este atîrnat un corp. Să se afle raportul energiilor potențiale E_{p1}/E_{p2} ale resorturilor.

2.5.18. Patru resorturi de aceeași constantă elastică k și aceeași lungime l_0 sînt legate între ele ca în figura 2.5.18. Să se calculeze energia potențială a sistemului cînd capetele legate între ele sînt deplasate în punctele: $P_1(x, y)$ $P_2(x, -y)$, $P_3(-x, y)$, $P_4(-x, -y)$, $P_5(x, 0)$, $P_6(0, y)$, $P_7(-x, 0)$, $P_8(0, -y)$. Se presupune că resorturile nu suferă deformarea de încovoiere.

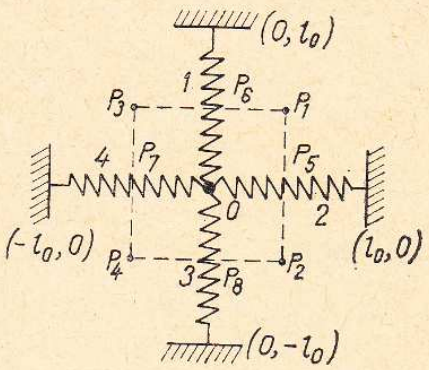


Fig. 2.5.18

2.5.19. Un corp punctiform de masă m cade într-un fluid, avînd viteza inițială v_0. Forța de rezistență ce se opune mișcării este de forma $\vec{R} = -km\vec{v}$, k — factor de proporționalitate. Să se afle: *a*) viteza corpului în funcție de timp; *b*) viteza de disipație a energiei.

2.5.20. Un corp punctiform de masă m, aflat la înălțimea h față de suprafața Pămîntului, este lansat în direcție orizontală cu viteza v_0. Considerînd că forța de rezistență ce se opune mișcării este proporțională cu viteza, $\vec{R} = -km\vec{v}$, să se determine: *a*) dependența energiei cinetice E_c și a energiei potențiale E_p de timp: *b*) traiectoria mișcării.

2.6. Legi de conservare. Ciocniri

2.6.1. Se dă sistemul din figura 2.6.1. Corpul punctiform de masă m se mișcă pe planul orizontal fără frecare. Cele trei resorturi au aceeași rigiditate k și aceeași lungime inițială l_0. Cînd corpul se află în poziția de echilibru O, cele două resorturi orizontale nu sînt deformate, iar distanța $O_1O = l$. Corpul este deplasat în punctul A ($OA = d$) și apoi lăsat liber. Să se determine viteza corpului în momentul trecerii prin poziția de echilibru.

2.6.2. Să se calculeze deformația maximă x a unui resort pe care cade (fără viteza inițială) un corp de la o înălțime $h = 1$ m, cunoscînd că același corp produce resortului o deformație statică $x_0 = 2$ cm.

2.6.3. Un corp se mișcă fără frecare pe o semisferă de rază R, pornind din punctul A (fig. 2.6.3). Corpului i se imprimă viteza inițială v_0 în direcția orizontalei. Să se determine: *a*) poziția pentru care corpul părăsește semisfera; *b*) pentru ce viteză v_0 corpul va părăsi semisfera la momentul inițial?

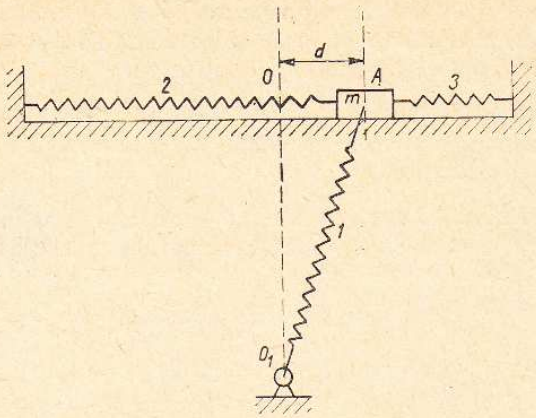


Fig. 2.6.1.

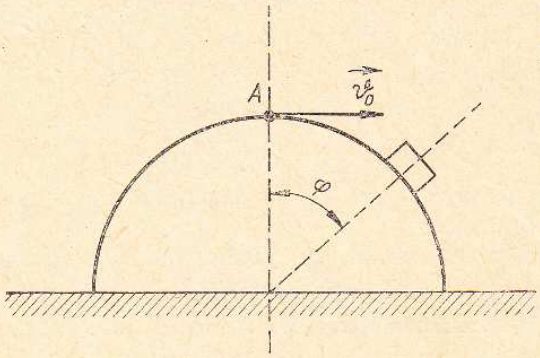


Fig. 2.6.3

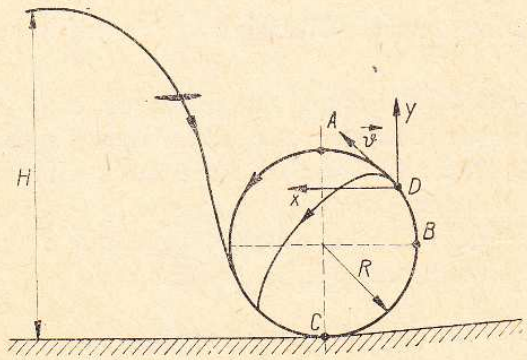


Fig. 2.6.4

2.6.4. Un corp punctiform se mișcă pe o traiectorie ca cea din figura 2.6.4, unde R este raza buclei circulare. *a*) Să se afle înălțimea H de la care trebuie să plece corpul pentru a nu părăsi traiectoria. *b*) Care este traiectoria corpului dacă el pleacă de la o înălțime mai mică decît H?

2.6.5. De la capătul liber al unui resort vertical de rigiditate k este fixat un platan de masă M. Pe platan se află un corp punctiform de masă m. Platanul este coborît sub acțiunea unei forțe constante F apoi lăsat liber. La ce înălțime h, respectiv, H se vor ridica platanul și corpul din momentul desprinderii corpului de pe platan?

2.6.6. Un om de masă m (considerat punct material) se află la capătul unui cărucior-platformă de lungime l și masă M aflat în repaus. Să se afle: *a*) cu ce viteză și după ce direcție trebuie să sară omul pentru ca să aterizeze la celălalt capăt al platformei, exact în momentul în care căruciorul s-a oprit; *b*) spațiul parcurs de cărucior după ce omul a aterizat pe platformă. În ambele cazuri, coeficientul de frecare dintre cărucior și planul orizontal este μ. Timpul de interacție dintre om și platformă este mic în comparație cu timpul de „zbor" al omului.

2.6.7. O particulă de masă m se mișcă din semispațiul unde are energia potențială constantă, E_p, în semispațiul unde are energia potențială constantă, $E'_p > E_p$. Aceste semispații sînt separate printr-un plan. Să se afle viteza particulei după ce aceasta a traversat planul de separare. Viteza inițială a particulei $\vec{v}$ este cunoscută (valoarea v și direcția — prin cosinușii directori α, β, γ).

2.6.8. Un corp de masă $m_1 = 3$ kg se mișcă orizontal cu viteza $v_1 = 6$ m/s și lovește central și neelastic un al doilea corp de masă $m_2 = 3$ kg care se

mișcă pe aceeași direcție cu viteza $v_2 = 2$ m/s, în același sens cu primul corp. Să se afle cantitatea de căldură Q degajată prin ciocnire.

2.6.9. Un corp de masă m_1 ce se mișcă cu viteza $\vec{v}_1$ se ciocnește perfect neelastic cu un corp de masă m_2 ce se mișcă cu viteza $\vec{v}_2$. Să se afle cantitatea de căldură degajată prin ciocnire, dacă unghiul dintre vitezele $\vec{v}_1$ și $\vec{v}_2$ este α.

2.6.10. O bară rigidă de lungime l și masă neglijabilă are la un capăt o bilă de masă m și poate oscila în jurul unui ax orizontal ce trece prin celălalt capăt. Bara este deviată cu 90° față de poziția de echilibru și cînd revine în această poziție ciocnește perfect elastic o altă bilă de masă $m' = 2\,m$ aflată în repaus. Să se calculeze: *a*) vitezele bilelor după ciocnire, u și u'; *b*) unghiul de deviație al barei după ciocnire.

2.6.11. Să se determine înălțimea h_1 de la care cade o sferă punctiformă pe un plan orizontal, dacă după ciocnire, sfera se ridică la înălțimea $h_2 = 64$ cm. Coeficientul de restituire este $k = 0{,}8$.

2.6.12. O bilă punctiformă de masă $m = 100$ g, căzînd liber de la înălțimea $h_0 = 2$ m, lovește podeaua, avînd un coeficient de restituire $k = 0{,}5$. Să se afle: *a*) înălțimea h_1 la care se ridică bila după lovirea podelei; *b*) cantitatea de căldură Q_1 degajată prin ciocnire; *c*) durata T_1 de la începutul căderii pînă la atingerea înălțimii h_1; *d*) înălțimea h_n, căldura totală Q_n și durata totală T_n după n ciocniri succesive cu podeaua.

2.6.13. Un corp de masă m_1 lovește un corp de masă m_2 aflat în repaus. Să se calculeze ce fracțiune K din energia sa cinetică inițială cedează corpului aflat în repaus, dacă ciocnirea este: *a*) perfect elastică; *b*) perfect neelastică. *c*) Ce fracțiune K' se transformă în căldură în ultimul caz? *d*) Să se particularizeze problema pentru $m_1 = m_2$, $m_2 = 9\,m_1$, $m_2 \to \infty$.

2.6.14. Un corp de masă $m_1 = 2$ kg se mișcă cu viteza $v_1 = 3$ m/s și ajunge din urmă un perete de masă M foarte mare ($m_1 \ll M$, $M \to \infty$), care se mișcă cu viteza $v_2 = 1$ m/s și de care se ciocnește perfect elastic și normal. Să se afle: *a*) vitezele u_1 și u_2 ale corpurilor după ciocnire; *b*) variația energiei cinetice ΔE_c și a impulsului corpului Δp datorită ciocnirii; *c*) raportul $\frac{v_1}{v_2}$ pentru ca după ciocnire, corpul să se oprească.

2.6.15. Două bile de masă $m_{1,2}$ sînt suspendate de fire paralele de lungime $l_{1,2}$ astfel încît se ating. Prima bilă este deviată pînă la înălțimea h_1 și lasată liber. La ce înălțime se ridică bilele dacă ciocnirea este: *a*) elastică; în ce sens va devia prima bilă după ciocnire? *b*) neelastică; ce cantitate de căldură se degajă în acest caz? Cunoscînd unghiul de deviere α_1 al primei bile, să se afle unghiurile de deviere ale bilelor dacă ciocnirea este: *c*) elastică și *d*) neelastică.

Capitolul 3

MECANICA SOLIDULUI RIGID

3.1. Cinematica rigidului. Mișcarea generală

Alegînd un punct O' al rigidului drept punct de reducere (pol), mișcarea rigidului se descompune într-o mișcare de translație, cu viteza de translație egală cu viteza polului și o mișcare de rotație în jurul unei axe trecînd prin polul ales (fig. 3.I):

$$\vec{r} = \vec{r}_0 + \vec{r}', \; \dot{\vec{r}} = \vec{v}, \; \dot{\vec{r}}_0 = \vec{v}_0, \; \dot{\vec{r}}' = \vec{\omega} \times \vec{r}'. \tag{3.1}$$

Ultima derivată rezultă din *formulele lui Poisson*, care dau derivatele în raport cu timpul ale versorilor unui triedru mobil:

$$\dot{\vec{i}} = \vec{\omega} \times \vec{i}, \; \dot{\vec{j}} = \vec{\omega} \times \vec{j}, \; \dot{\vec{k}} = \vec{\omega} \times \vec{k}, \tag{3.2}$$

unde $\vec{\omega}$ este viteza unghiulară instantanee de rotație a triedrului mobil. Rezultă descompunerea:

$$\vec{v} = \vec{v}_0 + \vec{\omega} \times \vec{r}' = \vec{v}_0 + \vec{\omega} \times (\vec{r} - \vec{r}_0) = \vec{v}_{tr} + \vec{v}_{rot}. \tag{3.3}$$

Dacă alegem un alt pol O', viteza de translație se schimbă și devine egală cu viteza noului pol, în timp ce vectorul $\vec{\omega}$ se deplasează *echipolent* în noul pol. Toate punctele rigidului au în fiecare moment aceeași proiecție (componentă longitudinală) a vitezei pe axa de rotație, independentă de alegerea polului.

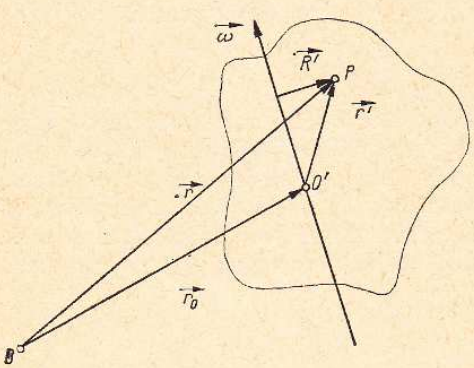


Fig. 3. I

Teorema lui Chasles: *mișcarea rigidului se descompune în fiecare moment într-o rotație instantanee în jurul unei axe (numită elicoidală) și o translație instantanee de-a lungul acestei axe (mișcare elicoidală instantanee).*

Axa elicoidală descrie, față de corp, o suprafață riglată numită *axoidă mobilă*, iar față de reperul fix, o suprafață riglată numită *axoidă fixă*. În fiecare moment, deplasarea rigidului reprezintă o rostogolire a axoidei mobile, legată solidar de corp, peste axoida fixă, în jurul axei elicoidale (generatoarea de contact dintre axoide), plus o translație de-a lungul acestei axe.

Dacă rigidul are un punct fix (mișcare sferică), axoidele devin conuri cu vîrful în punctul fix, rostogolindu-se fără translație.

Un punct al axei elicoidale este dat de vectorul de poziție:

$$\vec{r}'_c = \frac{1}{\omega^2}\,\vec{\omega}\times\vec{v}_0. \tag{3.4}$$

Descompunerea accelerațiilor (teorema lui R i v a l s):

$$\vec{a} = \vec{a}_0 + \vec{a}_\varepsilon + \vec{a}_\omega = \vec{a}_0 + \vec{\varepsilon}\times\vec{r}' + \vec{\omega}\times(\vec{\omega}\times\vec{r}'), \tag{3.5}$$

unde $\vec{a}_0 = \dot{\vec{v}}_0$ este accelerația translației,

$$\vec{a}_\varepsilon = \vec{\varepsilon}\times\vec{r}' = \dot{\vec{\omega}}\times\vec{r}'$$

este accelerația rotitoare (diferă în general de accelerația trangențială $\vec{a}_t$),

$$\vec{a}_\omega = \vec{\omega}\times(\vec{\omega}\times\vec{r}') = \vec{\omega}\times\vec{v}_{rot} = -\omega^2\vec{R}'$$

este accelerația axipetă, $\vec{R}'$ fiind vectorul distanță de la axa de rotație pînă la punctul considerat (diferă în general de accelerația normală $\vec{a}_n$).

* * *

3.1.1. Să se arate că punctele situate pe o dreaptă oarecare a rigidului au aceeași proiecție a vitezei pe acea dreaptă (fig. 3.1.1).

3.1.2. Un punct situat la distanța R de axa elicoidală are viteza v, care formează unghiul α cu axa. Să se afle viteza de translație v_0 și viteza unghiulară ω (fig. 3.1.2).

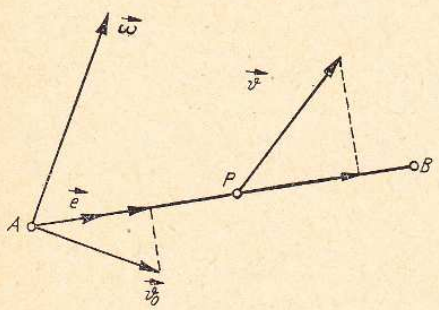


Fig. 3.1.1

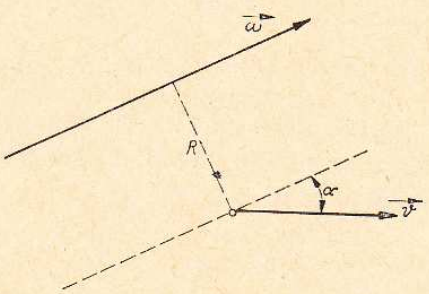


Fig. 3.1.2

3.1.3. Cunoscînd parametrii ($\vec{v}_0$, $\vec{\omega}$) ai mișcării elicoidale, să se afle locul geometric al punctelor care au viteza de n ori mai mare decît viteza de translație v_0 (fig. 3.1.3).

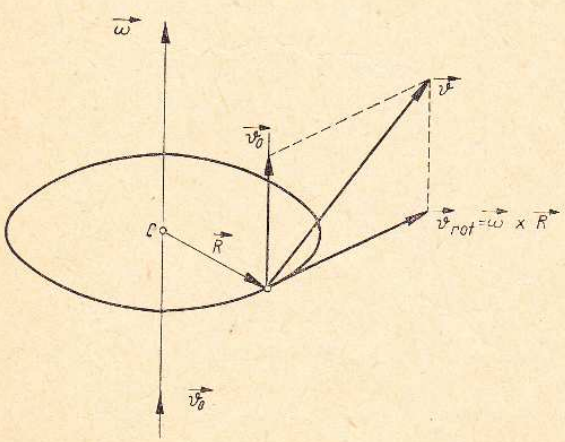


Fig. 3.1.3

3.1.4. Raza unui șurub este R și unghiul de înclinare a filetului α. Șurubul se rotește cu viteza unghiulară ω într-o piuliță fixă. Să se afle viteza de înaintare v_0 a șurubului (fig. 3.1.4).

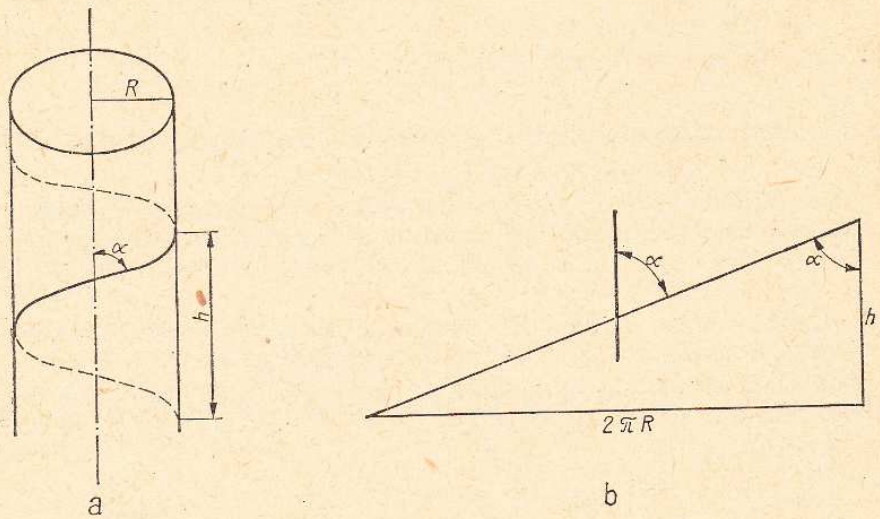


Fig. 3.1.4

3.1.5. Cunoscînd la un moment dat vitezele a trei puncte ale rigidului $\vec{v}_{1,2,3}$, să se afle direcția axei de rotație momentane și viteza de translație longitudinală $v_{0\parallel}$ (fig. 3.1.5).

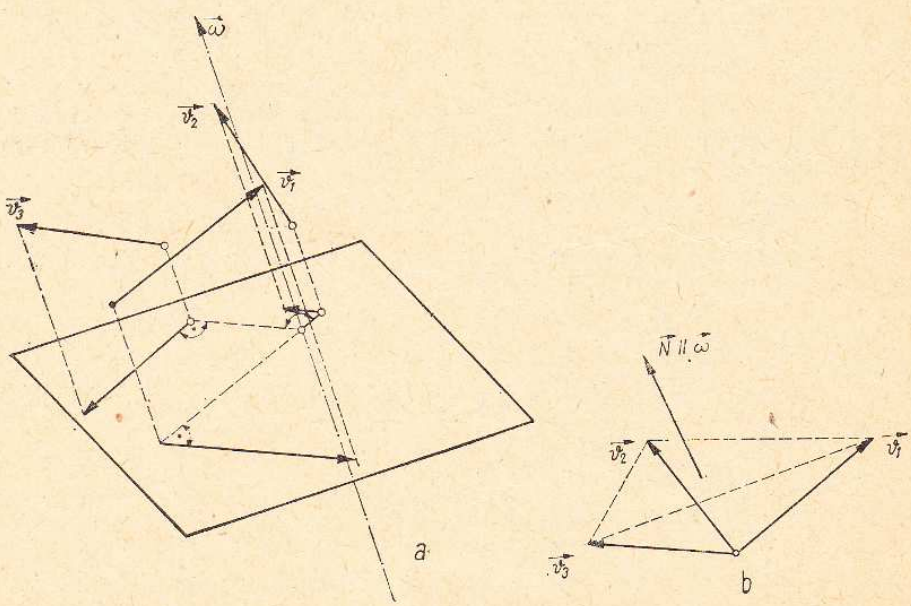


Fig. 3.1.5

3.1.6. Un disc de rază r se rostogolește fără lunecare pe o circumferință orizontală de rază R, astfel încît centrul discului descrie circumferința cu viteza unghiulară Ω. Să se afle accelerațiile rotitoare $\vec{a}_\varepsilon$ și axipetă $\vec{a}_\omega$ ale unui punct P de pe periferia discului, dat de coordonata unghiulară θ (fig. 3.1.6).

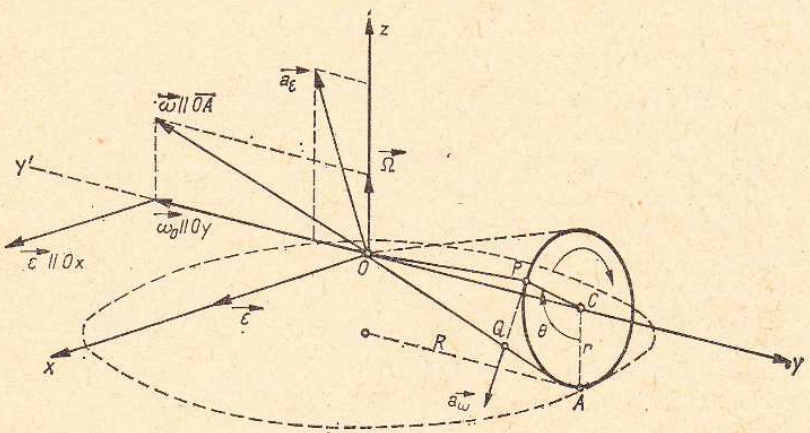


Fig. 3.1.6

3.1.7. Folosind formulele lui *Frénet*:

$$\frac{\overrightarrow{dt}}{ds} = \frac{\vec{n}}{R}, \quad \frac{\overrightarrow{dn}}{ds} = -\frac{\vec{t}}{R} + \frac{\vec{b}}{T},$$

$$\frac{\overrightarrow{db}}{ds} = -\frac{\vec{n}}{T},$$

unde $\vec{t}$, $\vec{n}$, $\vec{b}$ sînt versorii tangentei, normalei principale și a binormalei, iar R, T — razele de curbură și de torsiune, și formulele lui Poisson (3.2), să se arate că mișcarea triedrului Frénet $(\vec{t}, \vec{n}, \vec{b})$ asociat mobilului P în mișcarea sa pe traiectorie cu viteza v este o mișcare elicoidală cu parametrii:

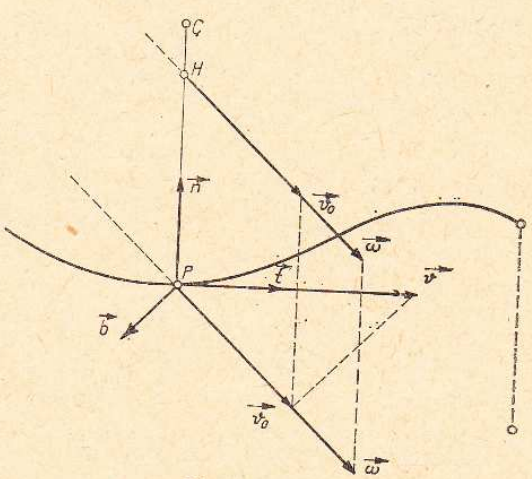


Fig. 3.1.7

$$v_0 = \frac{vR}{\sqrt{R^2 + T^2}}, \quad \vec{\omega} = v\left(\frac{\vec{t}}{T} + \frac{\vec{b}}{R}\right);$$

axa elicoidală trece prin punctul H dat de $\overrightarrow{PH} = \dfrac{\vec{n}R}{1 + R^2/T^2}$ (fig. 3.1.7).

3.2. Mișcarea plan-paralelă

Mișcarea plan-paralelă a rigidului este determinată de mișcarea unei figuri plane în planul său. Există în fiecare moment un *centru instantaneu de rotație* sau *centrul vitezelor*, a cărui viteză este nulă în acel moment. Vectorul de poziție al centrului instantaneu C este

$$\vec{r}'_c = \frac{1}{\omega^2}\vec{\omega}\times\vec{v}_0, \quad (\vec{r}_c = \vec{r}_0 + \vec{r}'_c). \tag{3.6}$$

Vitezele tuturor punctelor figurii sînt perpendiculare pe razele care le unesc cu C, $\vec{v} = \vec{\omega}\times\overrightarrow{CP}$, $v = \omega \cdot CP$, ceea ce corespunde rotației instantanee a figurii în jurul lui C cu viteza unghiulară ω.

Locul geometric al centrelor instantanee de rotație se numește *centroidă fixă* sau *bază* în planul fix, respectiv, *centroidă mobilă* sau *rulantă* sau *rostogolitoare*, față de corp. Axoidele sînt suprafețe cilindrice ridicate perpendicular pe centroide.

În fiecare moment, mișcarea figurii plane reprezintă o rostogolire fără lunecare a rulantei peste bază (mișcare epicicloidală, teorema lui P o i n s o t). Punctul lor de contact este centrul vitezelor C.

Formula acceleraților (3.5) devine în cazul plan:

$$\vec{a} = \vec{a}_0 + \vec{\varepsilon}\times\vec{r}' - \omega^2\vec{r}', \tag{3.7}$$

unde $\vec{\varepsilon} = \dot{\vec{\omega}}$ este perpendicular pe plan ca și $\vec{\omega}$, deci $\vec{a}_\varepsilon$ este perpendicular pe $\vec{r}'$, iar $\vec{a}_\omega$ este centripet către pol.

Există în fiecare moment *centrul acceleraților* W, a cărui accelerație este nulă în acel moment (fig. 3.II).

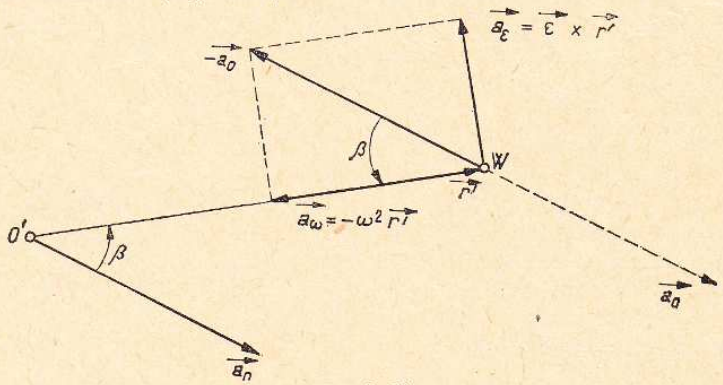


Fig. 3. II

Distanța de la polul O' la centrul W și unghiul direcției $\overrightarrow{O'W}$ față de accelerația translației sînt:

$$r'_w = O'W = \frac{a_0}{\sqrt{\omega^4 + \varepsilon^2}} = \frac{a_0}{\omega}\cos\beta, \quad \operatorname{tg}\beta = \frac{\varepsilon}{\omega^2},$$

$$\vec{r}'_w = \frac{\omega^2\vec{a}_0 + \vec{\varepsilon}\times\vec{a}_0}{\omega^4 + \varepsilon^2}. \tag{3.8}$$

În cazul rostogolirii *uniforme* a rulantei peste bază ($\varepsilon = 0$), centrul acceleraților se numește *centrul geometric al acceleraților* (G).

Accelerațiile tuturor punctelor fac același unghi $\beta = \operatorname{arc\,tg} \frac{\varepsilon}{\omega^2}$ cu razele care le unesc cu W și au valoarea $a = \overline{WP} \cdot \sqrt{\omega^4 + \varepsilon^2}$, ceea ce corespunde unei rotații instantanee în jurul lui W cu viteza ω și accelerația ε.

* * *

3.2.1. Într-o mișcare plană a unei tije A_1A_2 de lungime l se cunoaște la un moment dat viteza $\vec{v}_1$ a capătului A_1 și unghiul α_2 dintre viteza $\vec{v}_2$

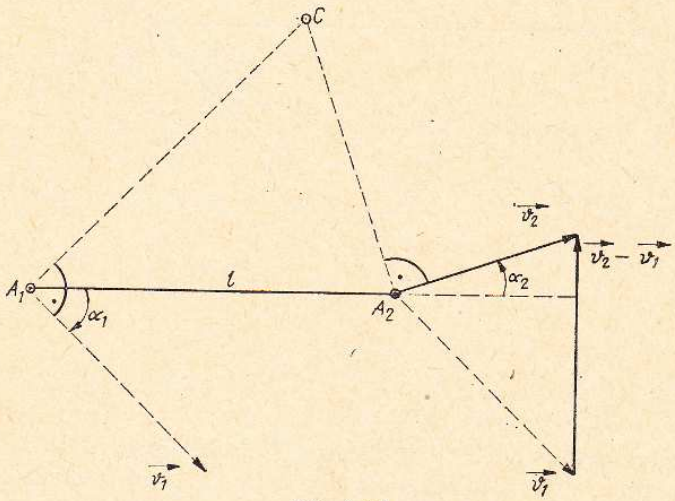


Fig. 3.2.1.

a capătului A_2 și direcția $\overrightarrow{A_1A_2}$ (fig. 3.2.1). Să se afle: 1) viteza v_2 a capătului A_2; 2) viteza unghiulară instantanee ω; 3) poziția centrului vitezelor C.

3.2.2. Să se deducă expresiile (3.6), (3.8) pentru vectorul de poziție al centrului vitezelor C, respectiv, vectorul de poziție al centrului accelerațiilor W.

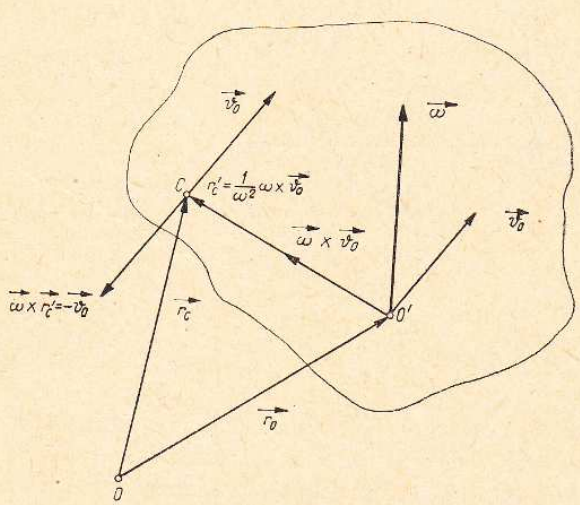


Fig. 3.2.2

3.2.3. Într-o mișcare plană cunoaștem la un moment dat accelerațiile $\vec{a}_{1,2}$ a două puncte $A_{1,2}$ situate la distanță cunoscută $A_1A_2 = l$. Să se afle: 1) viteza unghiulară instantanee ω: 2) accelerația unghiulară instantanee ε; 3) poziția centrului accelerațiilor W (fig. 3.2.3).

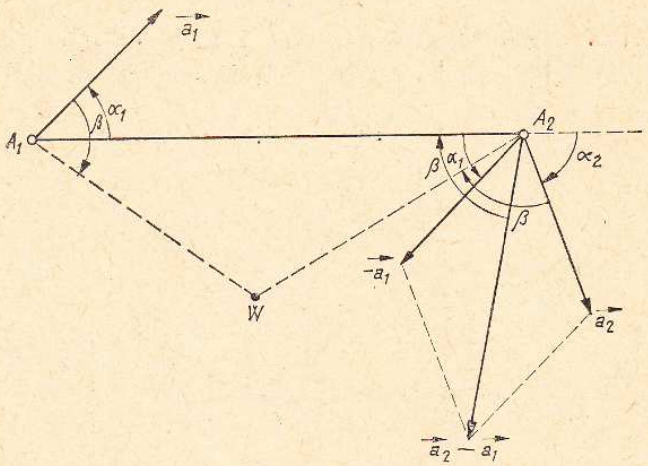


Fig. 3.2.3

3.2.4. Capetele unei tije AB de lungime l lunecă pe două drepte ortogonale Oxy. Să se afle: 1) centrul vitezelor C; 2) baza și rostogolitoarea; 3) centrul geometric al accelerațiilor G (fig. 3.2.4).

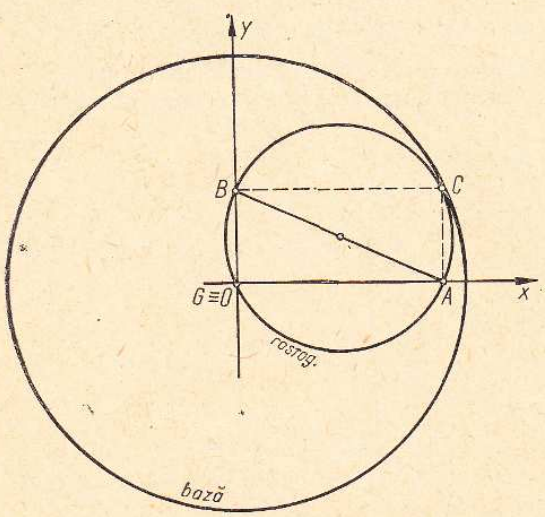


Fig. 3.2.4

3.2.5. Se dă mecanismul din figura 3.2.5, numit antiparalelogram, cu laturile îmbinate prin articulații. Se dau laturile: $AB = CD = 2a$, $AD = BC = 2b$. Latura AB este fixă. Să se afle pentru bara CD: 1) centrul vitezelor C; 2) baza și rostogolitoarea.

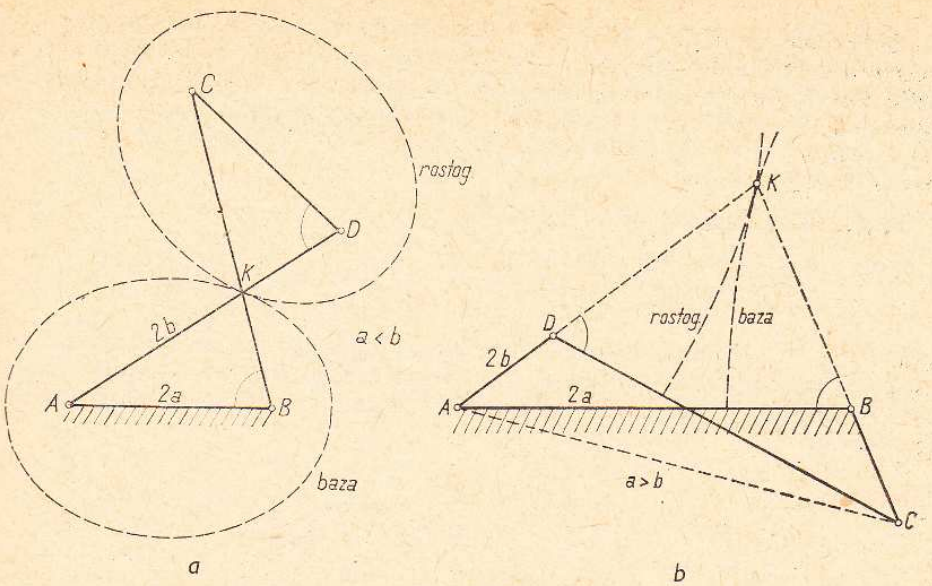


Fig. 3.2.5

3.2.6. În mecanismul bielă-manivelă din figura 3.2.6. se dau: $OA = a$, $AB = b$. Manivela OA se rotește uniform cu viteza unghiulară Ω. Să se afle pentru biela AB: 1) centrul vitezelor C; 2) viteza unghiulară ω; 3) viteza culisei B; 4) accelerația unghiulară ε.

3.2.7. Să se arate că: 1) punctul C' al rigidului care coincide la un moment dat cu centrul vitezelor C are în acel moment accelerația $\vec{a}_{c'} = -\vec{\omega} \times \vec{u}_c$, unde $\vec{u}_c$ este viteza de deplasare a centrului C pe bază; 2) traiectoria lui C' are

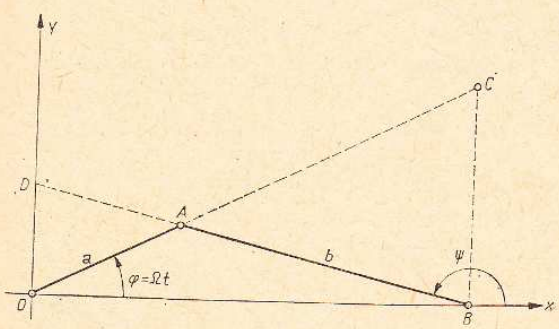


Fig. 3.2.6

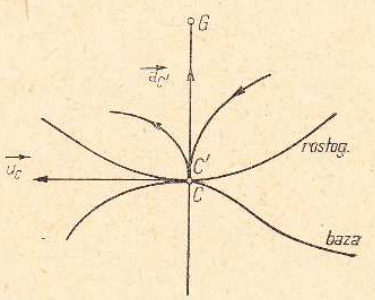


Fig. 3.2.7

în C un punct de întoarcere cu tangenta perpendiculară pe bază și rostogolitoare (după normala lor comună); 3) accelerația de mai sus este îndreptată spre centrul geometric al accelerațiilor G, a cărui poziție este dată de vectorul (fig. 3.2.7):

$$\overrightarrow{CG} = -\frac{\vec{\omega} \times \vec{u}_c}{\omega^2}, \quad CG = \frac{u_c}{\omega}, \quad (\vec{u}_c = \vec{\omega} \times \overrightarrow{CG}).$$

3.2.8. Să se arate că punctele figurii plane care au la un moment dat accelerația normală nulă se găsesc pe cercul de diametru CG (numit cercul inflexiunilor, deoarece traiectoriile au acolo puncte de inflexiune), iar punctele figurii care au accelerația tangențială nulă se găsesc pe un alt cerc de diametru $CT = \omega u_c/\varepsilon$ (CT — tangenta comună a axoidelor). Cele două cercuri se taie în C și W (fig. 3.2.8).

3.2.9. Să se demonstreze relația

$$\vec{\omega} = \vec{u}_c \times \left(\frac{\vec{n}}{R} - \frac{\vec{n}'}{R'}\right), \quad \frac{1}{CG} = \frac{1}{R'} \pm \frac{1}{R}, \quad (u_c = \omega \cdot CG),$$

unde $\vec{n}$, $\vec{n}'$, R, R' sînt versorii normalelor, respectiv, razele de curbură ale axoidelor în punctul de contact C (centrul vitezelor), $\vec{u}_c$ este viteza de deplasare a centrului C pe bază, iar G este centrul geometric al accelerațiilor (fig. 3.2.9).

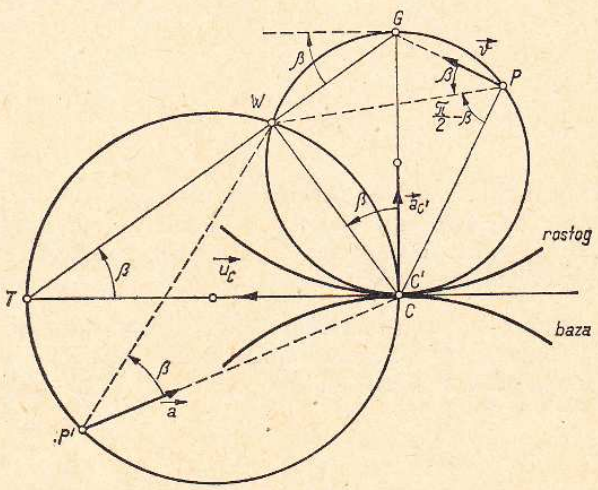


Fig. 3.2.8

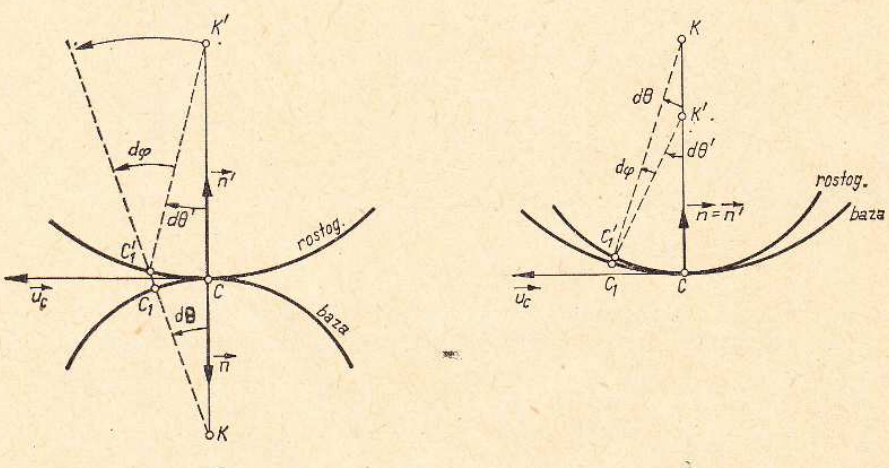


Fig. 3.2.9

3.2.10. Un cerc de rază R se rostogoleşte fără lunecare pe axa Ox cu viteza u. Să se afle: 1) baza şi rostogolitoarea, poziţia centrului vitezelor; 2) viteza ω şi acceleraţia ε ale cercului; 3) coordonatele unui punct P de pe cerc în funcţie de unghiul θ dintre raza PG şi verticala GC (fig. 3.2.10); 4) vitezele $v_{x,y}$,

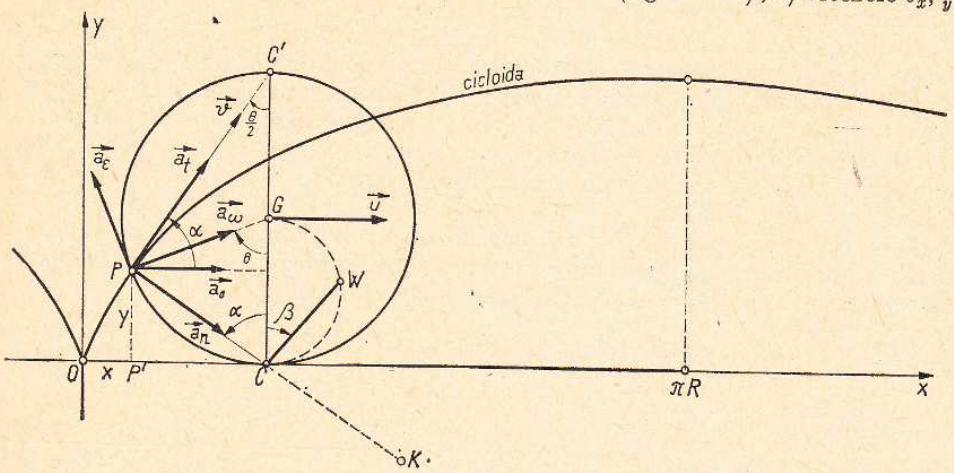


Fig. 3.2.10

v ale punctului P; 5) descompunerea vitezelor faţă de G; 6) unghiul $\alpha = \sphericalangle(\vec{v}, \vec{u})$; 7) viteza $\vec{v}'$ a punctului superior C'; 8) acceleraţiile $a_{x,y}$; 9) descompunerea acceleraţiilor faţă de G; 10) poziţiile centrelor acceleraţiilor; 11) acceleraţia normală $\vec{a}_n$ şi poziţia centrului de curbură K al traiectoriei (cicloidei); 12) lungimea s_0 a unei bucle a cicloidei.

3.2.11. Fie planul mobil legat solidar de axele intrinseci P $(\vec{t}, \vec{n})$ ale unui mobil P care se mişcă cu viteza v pe traiectoria sa plană ($\vec{t}$, $\vec{n}$ — versorii tangentei şi normalei la traiectorie). Să se arate că: 1) $\omega = v/R$, unde R este raza de curbură; 2) centrul vitezelor C este în centrul de curbură; 3) acceleraţia tangenţială a mobilului $a_t = \dot{v} = \varepsilon R + \omega \dot{R}$; 4) acceleraţia punctului C este $a_c = \omega R$ şi este paralelă cu $\vec{t}$; 5) viteza centrului C pe bază este $u_c = \dot{R}$ şi este paralelă cu $\vec{n}$ (fig. 3.2.11).

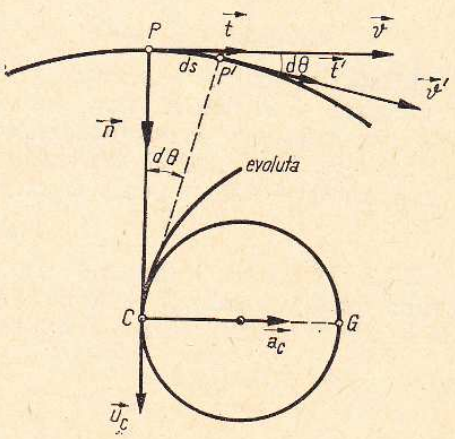


Fig. 3.2.11

3.3. Compunerea translaţiilor şi rotaţiilor

Un rigid este animat de două mişcări simultane dacă are o mişcare *relativă* (de translaţie şi rotaţie) faţă de un reper mobil S' şi o mişcare *de transport* (de translaţie şi rotaţie), solidară cu S', faţă de un reper fix S. A compune cele două mişcări înseamnă a găsi mişcarea *absolută* (de translaţie şi rotaţie) faţă de S a rigidului.

Viteza de translație este un vector *liber*, de aceea vitezele de translație se compun ca vectori liberi după regula paralelogramului.

Viteza unghiulară $\vec{\omega}$ este un vector *glisant (alunecător)* așezat de-a lungul axei de rotație. Dacă axele de rotație sînt *concurente*, vitezele unghiulare se adună după regula paralelogramului.

A deplasa axa de rotație, adică a deplasa echipolent vectorul $\vec{\omega}$ pe o distanță $\vec{r}_0$, este echivalent cu a introduce o translație suplimentară $-\vec{v} = -\vec{\omega} \times \vec{r}_0$ (figura 3.III). Prin urmare, putem deplasa vectorul $\vec{\omega}$ echipolent în altă parte, adăugînd însă translația compensatoare $\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r}_0$.

Un *cuplu de rotații* $(\vec{\omega}, -\vec{\omega})$ este echivalent cu o *translație*, perpendiculară pe planul cuplului și egală cu „momentul" cuplului ($v = \omega b$, b — distanța dintre axe) (fig. 3.IV).

Doi vectori $\vec{\omega}_{1,2}$ paraleli sau antiparaleli se compun analog forțelor paralele, dînd o rotație $\vec{\omega}_1 + \vec{\omega}_2$ de-a lungul unei axe care împarte distanța dintre axele date în raportul $b_1/b_2 = \omega_2/\omega_1$ (interior sau exterior).

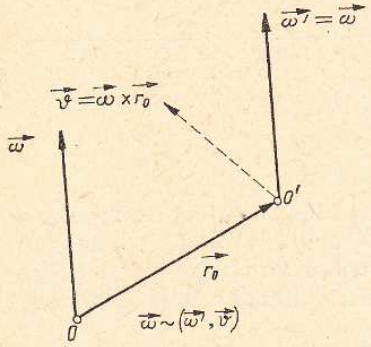


Fig. 3. III

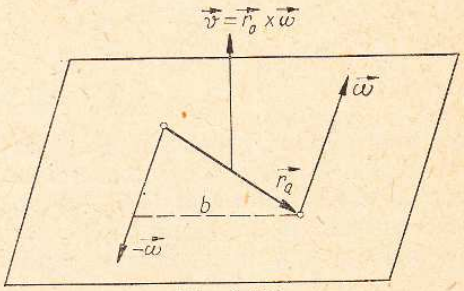


Fig. 3. IV

În sfîrșit, pentru a compune vectorii $\vec{\omega}_{1,2}$ neconcurenți (axe de rotație neconcurente), deplasăm unul din vectori pînă la concurența cu celălalt, adăugînd translația corespunzătoare: se obține vectorul $\vec{\omega} = \vec{\omega}_1 + \vec{\omega}_2$ plus o translație. Deplasînd $\vec{\omega}$ convenabil, obținem o mișcare elicoidală. Invers, o mișcare elicoidală se poate descompune în două rotații neconcurente.

* * *

3.3.1 Pe o bară de lungime l sînt fixate axele a n roți angrenate între ele. Prima roată de rază R_1 este fixă. Bara se rotește cu viteza unghiulară Ω. Să se afle viteza unghiulară ω_n a ultimei roți de rază R_n (fig. 3.3.1). Discuție.

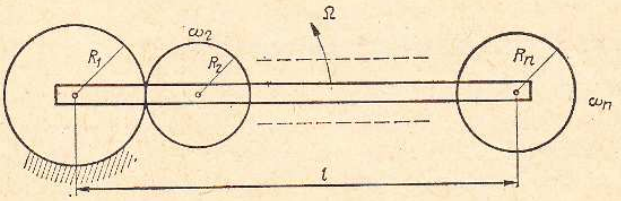


Fig. 3.3.1

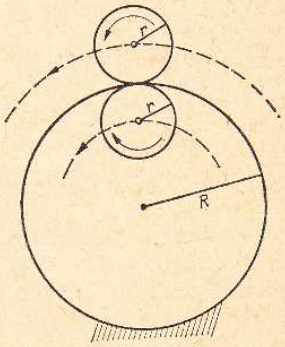


Fig. 3.3.2

3.3.2. O roată de rază r se rostogolește fără lunecare pe o altă roată fixă de rază R, în exterior sau interior, înconjurînd-o cu o frecvență n. Să se afle viteza unghiulară ω a roții r.

3.3.3. Să se compună două mișcări elicoidale antiparalele $(\vec{v}, \vec{\omega})$ și $(-\vec{v}, -\vec{\omega})$, ale căror axe se află la distanța b între ele (fig. 3.3.3).

3.3.4. Un corp se rotește simultan cu viteze unghiulare egale (ω) în jurul a două axe perpendiculare între ele și la distanța a între ele, ca în figura 3.3.4. Să se găsească mișcarea rezultantă.

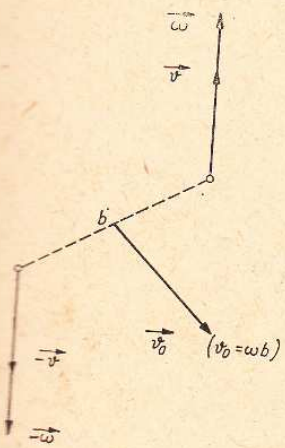


Fig. 3.3.3

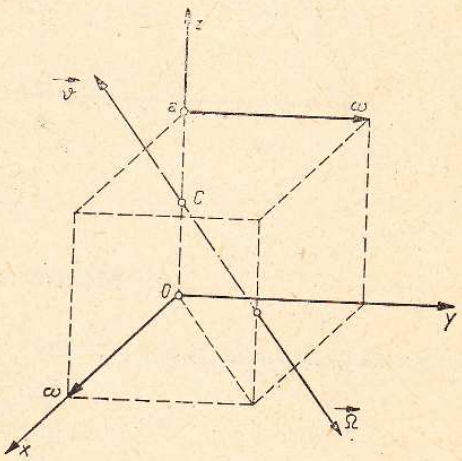


Fig. 3.3.4

3.3.5. Să se compună rotațiile $\vec{\omega}_{1,2,3}$ din figura 3.3.5, cu distanțele dintre axele de rotație a, b, c.

3.3.6. Să se compună mișcarea elicoidală $(\vec{v}, \vec{\omega})$ cu o translație v', sub unghiul α față de $\vec{\omega}$ (fig. 3.3.6).

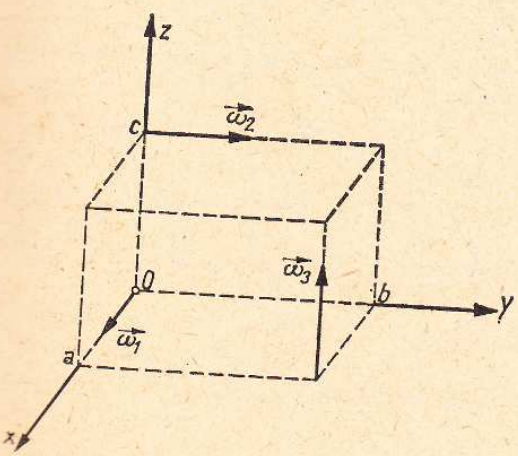


Fig. 3.3.5

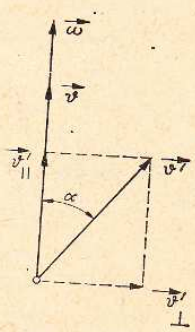


Fig. 3.3.6

3.3.7. Un con cu deschiderea 2α se rostogolește fără lunecare pe un plan orizontal, cu vîrful fix, măturînd planul cu viteza unghiulară Ω (fig. 3.3.7). Să se afle viteza unghiulară proprie (relativă) ω_0 și cea absolută ω ale conului.

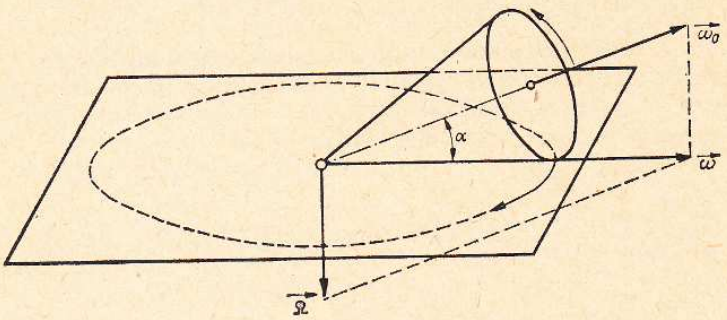


Fig. 3.3.7.

3.4. Momentele de inerție

Centrul de masă (CM) are coordonatele:

$$\vec{r}_{cm} = \frac{1}{m}\sum_{k=1}^{k=N} m_k \vec{r}_k, \quad m = \sum_{k=1}^{k=N} m_k, \tag{3.9,a}$$

$$x_{cm} = \frac{1}{m}\sum m_k x_k, \quad y_{cm} = \frac{1}{m}\sum m_k y_k, \quad z_{cm} = \frac{1}{m}\sum m_k z_k.$$

Sumele se pot grupa pe părțile componente ale corpului introducînd centrele de masă ale acestor părți:

$$x_{cm} = \frac{1}{m}\sum M_k X_k, \quad y_{cm} = \frac{1}{m}\sum M_k Y_k, \quad z_{cm} = \frac{1}{m}\sum M_k Z_k, \tag{3.9,b}$$

unde (X_k, Y_k, Z_k) sînt coordonatele centrului de masă al părții de masă M_k. Pentru o distribuție continuă a masei ($\mathrm{d}m = \rho \mathrm{d}V$):

$$\vec{r}_{cm} = \frac{1}{m}\int \vec{r}\,\mathrm{d}m = \frac{1}{m}\int_V \vec{r}\rho\,\mathrm{d}V, \quad m = \int_V \rho\,\mathrm{d}V, \tag{3.9,c}$$

$$x_{cm} = \frac{1}{m}\int x\rho\,\mathrm{d}V, \quad y_{cm} = \frac{1}{m}\int y\rho\,\mathrm{d}V, \quad z_{cm} = \frac{1}{m}\int z\rho\,\mathrm{d}V.$$

Momentul de inerție față de o axă:

$$I = \sum_{k=1}^{k=N} m_k R_k^2, \quad R_k \text{ — distanțele pînă la axă},$$

$$I = \int R^2\,\mathrm{d}m = \int R^2\rho\,\mathrm{d}V, \quad [I] = \mathrm{kg}\cdot\mathrm{m}^2. \tag{3.10}$$

Raza de inerție (sau de girație) față de o axă este distanța la care ar trebui concentrată toată masa corpului pentru a da același moment de inerție față de axă:

$$r_g = \sqrt{I/m}. \tag{3.10'}$$

Matricea (tensorul) momentelor de inerție are componentele: momentele de inerție axiale (față de axe) (elementele diagonale),

$$I_{xx} = \int (y^2 + z^2)\rho \, dV, \quad I_{yy} = \int (z^2 + x^2)\, \rho \, dV,$$

$$I_{zz} = \int (x^2 + y^2)\, \rho \, dV \tag{3.11,a}$$

și momentele centrifugale sau de deviație (elementele nediagonale),

$$I_{xy} = I_{yx} = -\int xy\rho \, dV, \quad I_{yz} = I_{zy} = -\int yz\rho \, dV,$$

$$I_{zx} = I_{xz} = -\int zx\rho \, dV. \tag{3.11,b}$$

Momentul de inerție I față de o axă arbitrară care trece prin origine și face unghiurile $\alpha_{x,y,z}$ cu axele de coordonate:

$$I = I_{xx} \cos^2 \alpha_x + I_{yy} \cos^2 \alpha_y + I_{zz} \cos^2 \alpha_z + 2I_{xy} \cos \alpha_x \cos \alpha_y + \\ + 2I_{yz} \cos \alpha_y \cos \alpha_z + 2I_{zx} \cos \alpha_z \cos \alpha_x. \tag{3.12}$$

Prin fiecare punct al rigidului trec 3 axe anumite, ortogonale între ele, numite *axe principale de inerție*, față de care momentele centrifugale de inerție se anulează (matricea momentelor de inerție devine diagonală). Dacă axele $Oxyz$ sînt principale, în (3.12) dispar ultimii 3 termeni.

În particular, prin centrul de masă (CM) trec 3 axe ortogonale între ele, $Ox_1x_2x_3$, numite axe *principale centrale de inerție* (cu momentele de inerție $I_{1,2,3}$). O axă principală centrală este principală pentru toate punctele sale.

Dacă un corp omogen posedă o axă de simetrie, ea va fi axă principală centrală de inerție.

Teorema lui Steiner: *momentul de inerție I față de o axă oarecare este egal cu momentul de inerție orbital sau extern al corpului presupus redus la un punct material în* CM *plus momentul de inerție propriu sau intern I_0 față de o axă centrală paralelă cu cea dată:*

$$I = mR_0^2 + I_0, \tag{3.13}$$

unde R_0 este distanța CM *pînă la axa dată.*

Momentul de inerție față de o axă centrală oarecare se exprimă prin cele trei momente principale centrale de inerție:

$$I = I_1 \cos^2 \alpha_1 + I_2 \cos^2 \alpha_2 + I_3 \cos^2 \alpha_3, \tag{3.14}$$

unde $\alpha_{1,2,3}$ sînt unghiurile făcute de axa dată cu axele principale centrale

Momentele de inerție față de un sistem de coordonate central cu axa $Oz \equiv Ox_3$ și axele Oxy rotite cu unghiul α față de axele principale

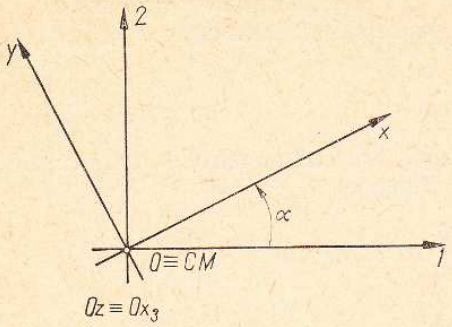


Fig. 3. V

Ox_1x_2 (figura 3.V) se exprimă prin momentele de inerție principale centrale astfel:

$$I_{xx} = I_1 \cos^2 \alpha + I_2 \sin^2 \alpha,$$
$$I_{yy} = I_1 \sin^2 \alpha + I_2 \cos^2 \alpha,$$
$$I_{zz} = I_3,\ I_{xy} = (I_2 - I_1) \sin \alpha \cos \alpha,$$
$$I_{yz} = 0,\ I_{xz} = 0. \qquad (3.15)$$

* * *

3.4.1. Să se demonstreze că pentru o figură *plană*, formată din puncte materiale (discrete) sau cu distribuție continuă de masă, avem relația:

$$I_3 = I_1 + I_2,$$

unde axele Ox_1x_2 sînt situate în planul figurii, iar axa Ox_3 este perpendiculară pe planul figurii (fig. 3.4.1).

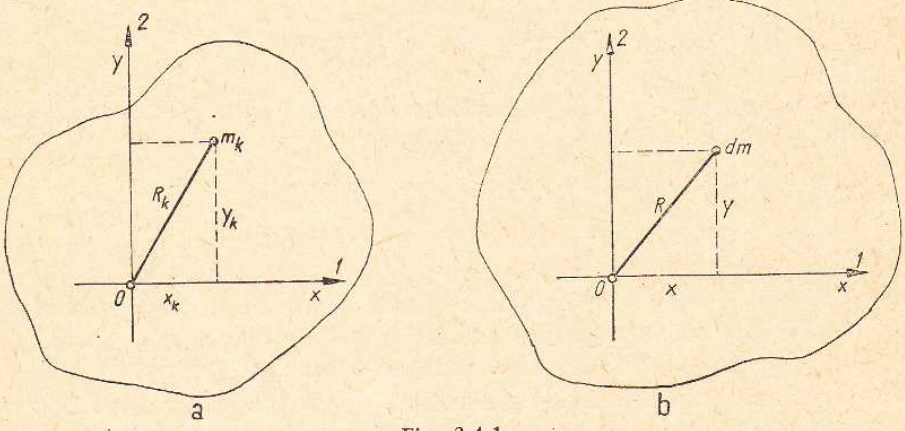


Fig. 3.4.1

3.4.2. Să se calculeze momentele principale centrale de inerție ale moleculelor din figura 3.4.2, considerînd atomii drept puncte materiale: *a*) moleculă biatomică; b) moleculă triatomică sub formă de triunghi isoscel.

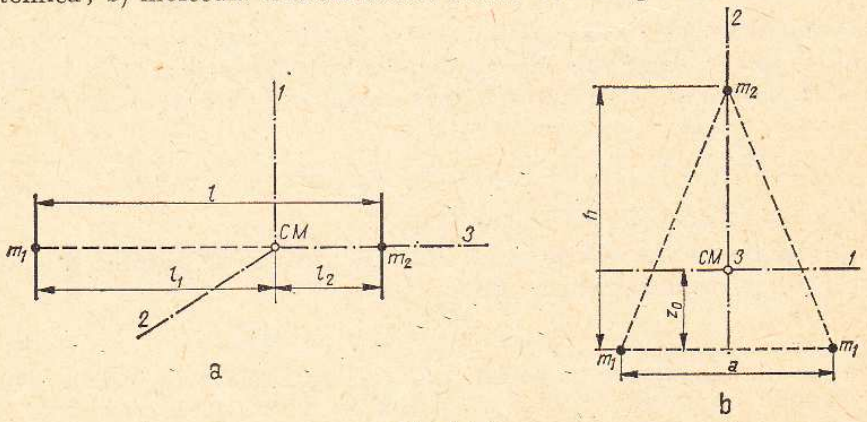


Fig. 3.4.2

3.4.3. Idem, pentru o moleculă tetraatomică sub formă de piramidă triunghiulară regulată (fig. 3.4.3).

3.4.4. Să se demonstreze că momentele de inerție față de o axă oarecare se exprimă prin momentele principale de inerție față de axele principale care trec printr-un punct al axei date (fig. 3.4.4):

$$I = I_1 \cos^2 \alpha_1 + I_2 \cos^2 \alpha_2 + I_3 \cos^2 \alpha_3.$$

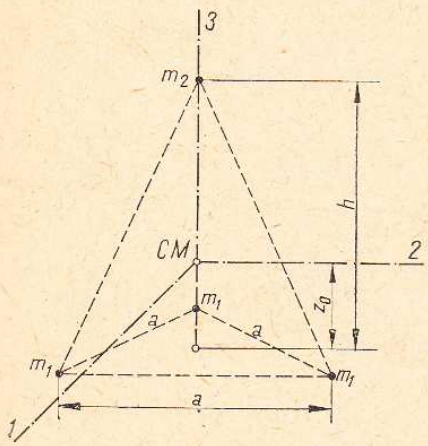


Fig. 3.4.3

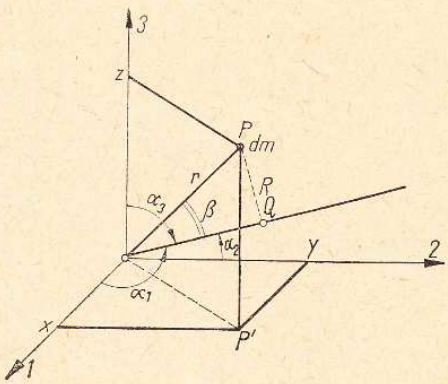
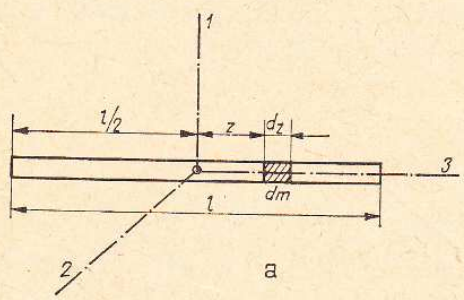
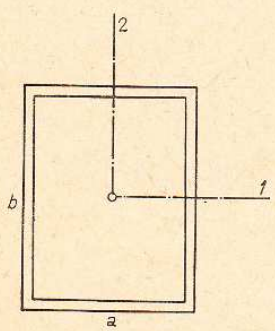


Fig. 3.4.4

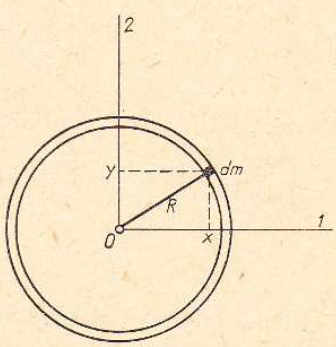


a

Fig. 3.4.5



b



c.

În particular, axa dată poate fi centrală și momentele de inerție principale pot fi centrale față de CM.

3.4.5. Să se calculeze momentele principale centrale de inerție ale corpurilor (liniilor) *omogene* (fig. 3.4.5): *a*) tijă subțire de masă m și lungime l; *b*) cadru (ramă) subțire dreptunghiular(ă) de masă m și laturi a, b; *c*) inel subțire de masă m și rază R.

3.4.6. Idem, pentru un cadru (contur) rombic de masă m, latură a și unghi ascuțit α (fig. 3.4.6).

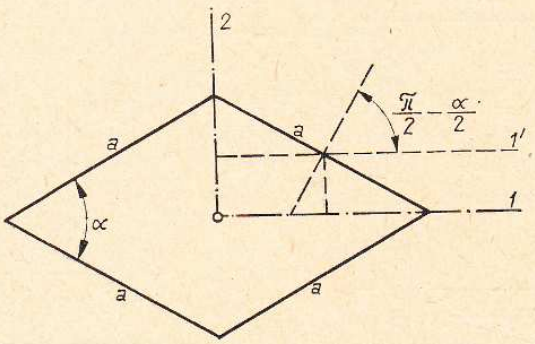


Fig. 3.4.6

3.4.7. Să se calculeze momentele principale centrale de inerție ale corpurilor (suprafețelor) *omogene* (fig. 3.4.7): *a*) dreptunghi de masă m și laturi a, b; *b*) coroană circulară de masă m și raze R_1, R_2.

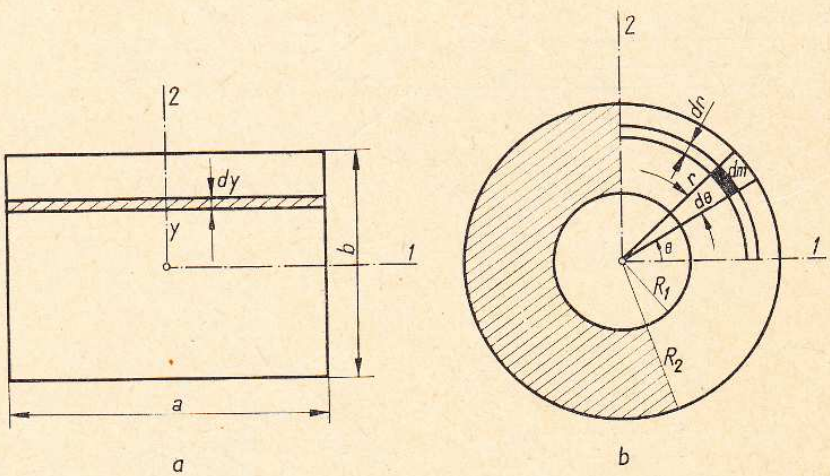


Fig. 3.4.7

3.4.8. Idem, pentru (fig. 3.4.8): *a*) pătură sferică subțire de masă m și rază R; *b*) pătură cilindrică subțire de masă m, rază R și înălțime h; *c*) pătură conică subțire de masă m, rază R și înălțime h.

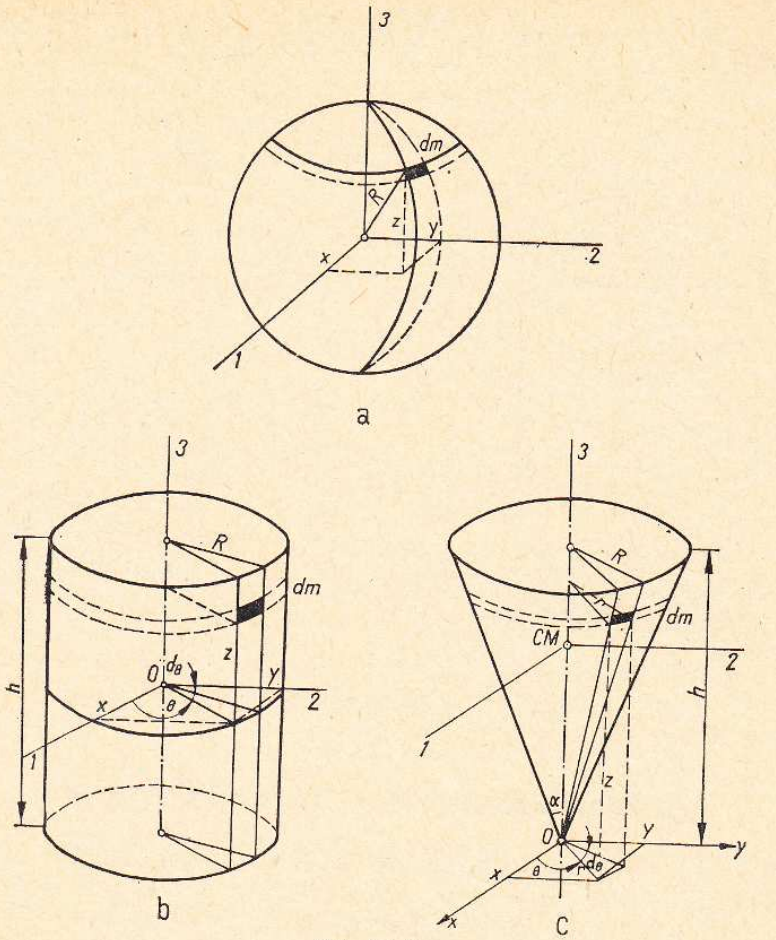


Fig. 3.4.8

3.4.9 Să se calculeze momentele principale centrale de inerție ale corpurilor (volumelor) *omogene* (fig. 3.4.9): *a*) pătură sferică de masă m și raze $R_{1,2}$; *b*) paralelipiped dreptunghic de masă m și muchii a, b, c.

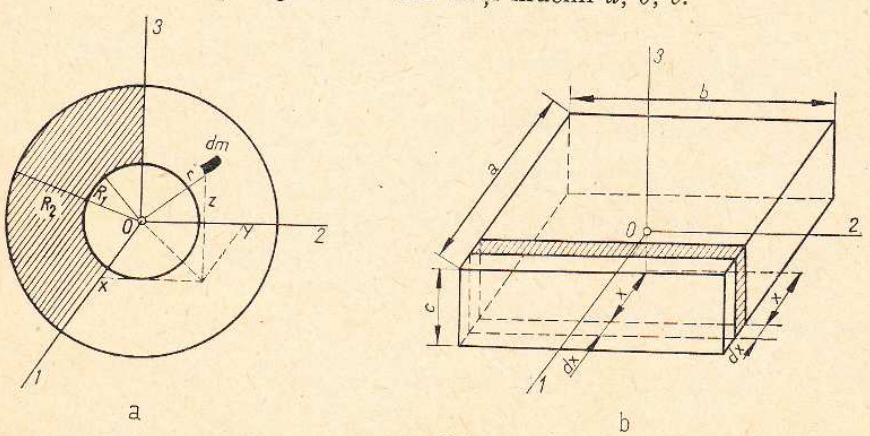


Fig. 3.4.9

√3.4.10. Idem, pentru (fig. 3.4.10): *a*) pătură cilindrică de masă m, înălțime h și raze $R_{1,2}$; *b*) con circular de masă m, înălțime h și rază R.

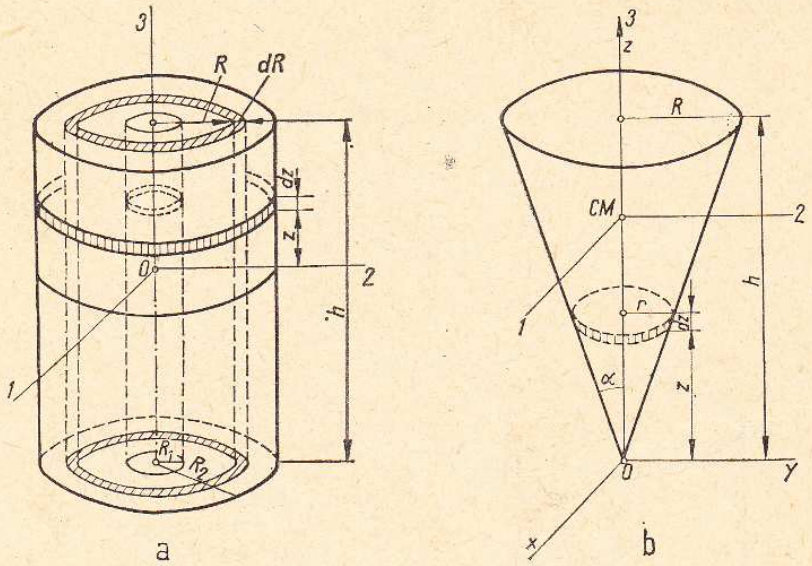


Fig. 3.4.10

3.5. Dinamica rigidului. Mișcarea generală

Mișcarea generală. Reamintim teoremele dinamicii *sistemului mecanic. Rezultanta forțelor interne este nulă. Momentul rezultant al forțelor interne față de orice punct (pol) este nul.* Lucrul mecanic al forțelor interne *nu este* în general nul (la rigide este nul).

Teorema impulsului total:

$$\dot{\vec{P}} = \vec{F},\ \vec{P} = \Sigma m_k \vec{v}_k,\ \vec{F} = \Sigma \vec{F}_k, \tag{3.16}$$

unde $\vec{P}$ este impulsul total al sistemului, $\vec{F}$ este rezultanta forțelor *externe*.

Teorema momentului cinetic total:

$$\dot{\vec{J}} = \vec{M},\ \vec{J} = \Sigma \vec{r}_k \times m_k \vec{v}_k,\ \vec{M} = \Sigma \vec{r}_k \times \vec{F}_k, \tag{3.17}$$

unde $\vec{J}$ este momentul cinetic total față de un pol fix, luat ca origine, $\vec{M}$ — momentul rezultant al forțelor *externe*, față de același pol.

Teorema energiei cinetice totale:

$$\Delta E_c = W + \mathscr{W},\ E_c = \Sigma \frac{1}{2} m_k v_k^2,\ W = \Sigma \int \vec{F}_k \, d\vec{r}_k,\ \mathscr{W} = \Sigma \int \vec{\mathscr{F}}_k \, d\vec{r}_k \tag{3.18}$$

unde W, $\mathscr{W}$ este lucrul mecanic al forțelor externe, respectiv, interne.

Teoremele centrului de masă:

$$\vec{P} = \Sigma m_k \vec{v}_k = m\vec{v}_{cm},\ \vec{F} = \Sigma \vec{F}_k = m\vec{a}_{cm},\ (m = \Sigma m_k). \tag{3.19}$$

Notăm SL = sistemul laboratorului = reperul *inerțial* legat de laborator, SCM = sistemul centrului de masă = reperul cu originea în CM, în *translație* față de SL.

Teoremele de descompunere față de CM (analoage teoremei lui Steiner):

$$\vec{J} = \vec{L} + \vec{S},\ \vec{L} = \vec{r}_{cm} \times \vec{P} = \vec{r}_{cm} \times m\vec{v}_{cm}, \tag{3.20}$$

$$E_c = E_{tr} + E_{rel},\ E_{tr} = \frac{1}{2} m v_{cm}^2,$$

unde $\vec{L}$ este momentul cinetic *orbital* (extern), obținut ca și cum toată masa ar fi concentrată în CM; $\vec{S}$ este momentul cinetic *propriu* (intern), calculat în SCM; E_{tr} — energia cinetică de translație (orbitală sau externă), calculată ca și cum toată masa ar fi concentrată în CM; E_{rel} — energia cinetică relativă (proprie sau internă), calculată în SCM.

Teoremele (3.17—18) sînt valabile și în SCM, oricare ar fi mișcarea centrului de masă, anume:

$$\dot{\vec{L}} = \vec{r}_{cm} \times \vec{F},\ \dot{\vec{S}} = \vec{M}',\ (\vec{M}' \text{ calculat în raport cu CM}), \tag{3.21}$$

$$\Delta E_{tr} = \Delta\left(\frac{1}{2} m v_{cm}^2\right) = \int \vec{F}\vec{v}_{cm}\, dt,$$

$$\Delta E_{rel} = W' + \mathscr{W}',\ (W',\ \mathscr{W}' \text{ calculate în SCM}).$$

Dinamica rigidului. Momentul cinetic, în raport cu un punct fix al rigidului, luat ca origine:

$$\vec{J} = \hat{I}\vec{\omega} = \vec{i}(I_{xx}\omega_x + I_{xy}\omega_y + I_{xz}\omega_z) + \vec{j}(I_{yx}\omega_x + I_{yy}\omega_y +$$

$$+ I_{yz}\omega_z) + \vec{k}(I_{zx}\omega_x + I_{zy}\omega_y + I_{zz}\omega_z),\ \dot{\vec{J}} = \vec{M}, \tag{3.22}$$

unde $\vec{M}$ este momentul rezultant al forțelor aplicate în raport cu același pol origine, iar $\hat{I}$ este matricea momentelor de inerție.

Momentul cinetic în raport cu axa de rotație (proiecția lui $\vec{J}$ pe axă) este

$$J_{\parallel} = I\omega,\ \dot{J}_{\parallel} = M_{\parallel}, \tag{3.23}$$

unde $M_{\parallel}$ este proiecția lui $\vec{M}$ pe $\vec{\omega}$ (momentul forțelor în raport cu axa).

Energia cinetică de rotație în jurul unei axe trecînd prin origine:

$$E_{rot} = \frac{1}{2}(\omega,\ \hat{I}\omega) = \frac{1}{2} I_{xx}\omega_x^2 + \frac{1}{2} I_{yy}\omega_y^2 + \frac{1}{2} I_{zz}\omega_z^2 +$$

$$+ I_{xy}\omega_x\omega_y + I_{yz}\omega_y\omega_z + I_{zx}\omega_z\omega_x = \frac{1}{2} I\omega^2 = \frac{1}{2}\vec{J}\vec{\omega}, \tag{3.24}$$

$$\Delta E_{rot} = \int \vec{M}\vec{\omega}\, dt = \int M_{\parallel}\, d\varphi,\ (\omega = \dot{\varphi}).$$

Față de axele *principale* (în particular, principale *centrale*), expresiile de mai sus se „diagonalizează":

$$\vec{J} = \vec{i} I_1\omega_1 + \vec{j} I_2\omega_2 + \vec{k} I_3\omega_3 = I_1\vec{\omega}_1 + I_2\vec{\omega}_2 + I_3\vec{\omega}_3,$$

$$E_{rot} = \frac{1}{2} I_1\omega_1^2 + \frac{1}{2} I_2\omega_2^2 + \frac{1}{2} I_3\omega_3^2 = \frac{1}{2} I\omega^2. \tag{3.25}$$

Teoremele de descompunere în raport cu CM:

$$\vec{J} = \vec{L} + \vec{S},\ \vec{S} = \hat{I}_0\vec{\omega}, \tag{3.26}$$

$$E_c = E_{tr} + E_{rot},\ E_{rot} = (\omega, \hat{I}_o\omega) = \frac{1}{2} I_0\omega^2,$$

unde $\hat{I}_0$ este matricea momentelor de inerție în SCM, I_0 = momentul de inerție față de axa de rotație centrală.

Puterea dezvoltată de forțele aplicate:

$$\vec{P} = \vec{F}\vec{v}_{cm} + \vec{M}_0\vec{\omega} = P_{tr} + P_{rot}, \tag{3.27}$$

unde $\vec{M}_0$ este momentul rezultant al forțelor în raport cu CM.

$$\dot{\vec{J}} = \dot{\vec{L}} + \dot{\vec{S}} = \vec{r}_{cm}\times\vec{F} + \vec{M}_0,\ \dot{\vec{L}} = \vec{r}_{cm}\times\vec{F},\ \dot{\vec{S}} = \vec{M}_0,$$

$$\Delta E_c = \Delta(E_{tr} + E_{rot}) = \Delta\left(\frac{1}{2} mv_{cm}^2 + \frac{1}{2} I_0\omega^2\right) = \tag{3.28}$$

$$= W = W_{tr} + W_{rot} = \int (\vec{F}\vec{v}_{cm} + \vec{M}_0\vec{\omega})\,dt.$$

Notăm SR = sistem de referință, SC = sistem de coordonate.

În SC propriu, adică în SC legat solidar de corp, acesta este în repaus, anume sub acțiunea forțelor aplicate și a forțelor complementare de transport (de inerție) (pseudoforțe):

$$\text{(a)} \qquad \vec{F} + \vec{F}_c = 0,\ \vec{F} = \Sigma\vec{F}_k,\ \vec{F}_c = \vec{F}_{tr} = -\Sigma m_k\vec{a}_k = -\int \vec{a}\,dm,$$

$$\text{(b)} \qquad \vec{M} + \vec{M}_c = 0,\ \vec{M} = \Sigma\vec{r}_k\times\vec{F}_k,\ \vec{M}_c = \vec{M}_{tr} = -\Sigma\vec{r}_k\times m_k\vec{a}_k = \tag{3.29}$$

$$= -\int \vec{r}\times\vec{a}\,dm,$$

unde $\vec{a}_k$ sînt accelerațiile, date de descompunerea (3.4), § 3.1.

Rezultanta $\vec{F}_c$ și momentul $\vec{M}_c$ al forțelor de inerție în raport cu CM sînt

$$\vec{F}_c = -m\vec{a}_{cm},\ \vec{M}_c = -\hat{I}_0\vec{\varepsilon} - \vec{\omega}\times(\hat{I}_0\vec{\omega}), \tag{3.30}$$

unde $\hat{I}_0$ este matricea momentelor de inerție într-un reper central propriu (legat rigid de corp).

Prin urmare, rigidul este în „echilibru" sub acțiunea forțelor aplicate și a forțelor de inerție (3.30) care se reduc la rezultanta $\vec{F}_c$ aplicată în CM și *la cuplul* $\vec{M}_c$ (momentul forțelor de inerție în raport cu CM) (*metoda cinetostatică*).

* * *

3.5.1. Un șurub se rotește liber, fără frecare, sub acțiunea greutății, într-o piuliță orizontală fixă. Pasul șurubului este h și raza de girație față de axa sa este r_g. Să se calculeze accelerația de translație și accelerația unghiulară ε a șurubului.

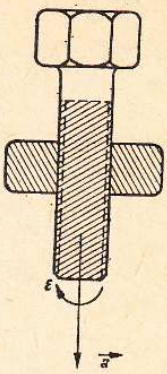


Fig. 3.5.1.

3.6. Rotația în jurul axei fixe

Alegem reperul fix și cel propriu central (legat rigid de corp cu originea în CM) astfel ca axa Oz să fie de-a lungul axei de rotație ω, $O'z' \| Oz$ și axa $O'x'$ să

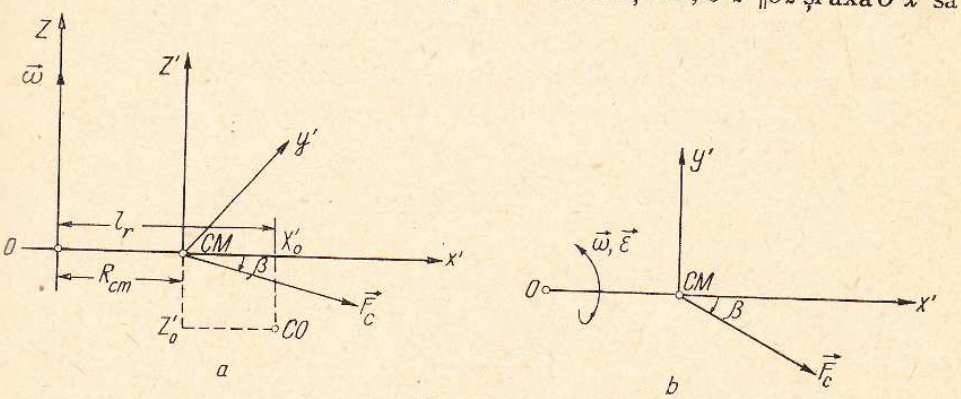


Fig. 3. VI

intersecteze axa de rotație (fig. 3.VI). Atunci $\omega_z = \omega$, $\omega_x = \omega_y = 0$, $\varepsilon_z = \varepsilon$, $\varepsilon_x = \varepsilon_y = 0$; $I_{zz} = I = I_0 + mR_{cm}^2$, $I_0 = I'_{zz}$. Ecuația fundamentală:

$$M_{||} = \dot{J}_{||} = I\varepsilon, \quad \varepsilon = \dot{\omega} = \ddot{\theta}. \tag{3.31}$$

Rezultanta forțelor de inerție (3.30) devine (față de reperul propriu):

$$\vec{F}_c = -m\vec{a}_{cm} = mR_{cm}(\omega^2, -\varepsilon, 0); \; F_c = mR_{cm}\sqrt{\omega^4 + \varepsilon^2}, \tag{3.32}$$
$$\operatorname{tg}\beta = -\varepsilon/\omega^2.$$

Această rezultantă poate fi considerată ca aplicată în CM plus cuplul corespunzător ca în (3.30) sau ca aplicată în *centrul de oscilație* de coordonate:

$$x'_0 = \frac{I_0}{mR_{cm}}, \; y'_0 = 0, \; z'_0 = -\frac{I'_{xz}}{mR_{cm}}, \tag{3.33}$$

$$l_r = I/mR_{cm} = R_{cm} + I_0/mR_{cm}, \tag{3.34}$$

unde l_r este *lungimea redusă* a pendulului fizic corespunzător, plus un cuplu longitudinal, cu momentul paralel cu $\vec{F}_c$:

$$\vec{M}'_{\parallel} = I'_{zy}(\omega^2, -\varepsilon, 0), \quad M'_{\parallel} = I'_{yz}\sqrt{\omega^4 + \varepsilon^2}, \tag{3.35}$$

trebuie deci cunoscute momentele de inerție I'_{xz}, I'_{yz}, $I'_{zz} = I_0$. Dacă $I'_{yz} = 0$, forțele de inerție se reduc numai la rezultanta $\vec{F}_c$, echipolentă cu forța de inerție a CM, calculată ca și cum acolo ar fi concentrată toată masa, *însă cu punctul de aplicație în centrul de oscilație.*

* * *

3.6.1. Pe o roată de rază R și moment de inerție I este înfășurat un fir de capătul căruia atîrnă un corp de masă m (fig. 3.6.1). Se neglijează frecările. Să se afle: accelerația a a corpului m, accelerația unghiulară ε a roții, tensiunea T din fir, turația n a roții cînd corpul a coborît cu o distanță h, diferența ΔN dintre apăsarea statică (cu roata blocată) și cea dinamică, exercitate de roată asupra axului său.

3.6.2. Peste un scripete de rază R și moment de inerție I este trecut un fir la capetele căruia atîrnă două corpuri de mase $m_{1,2}$ (fig. 3.6.2). Se neglijează frecările scripetelui în lagăre. Să se afle: accelerația a a corpurilor, tensiunile $T_{1,2}$ din fire, diferența ΔN dintre apăsarea statică (cu scripetele blocat) și cea dinamică exercitată de scripete asupra lagărelor.

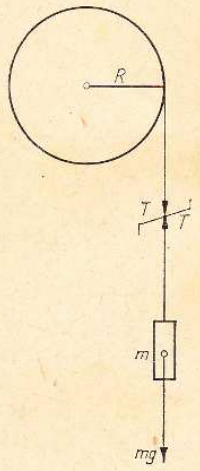


Fig. 3.6.1

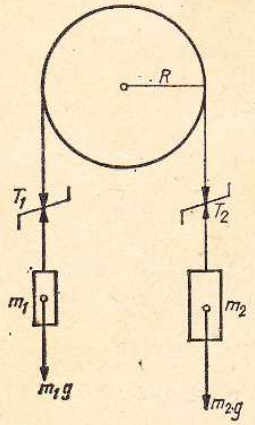


Fig. 3.6.2

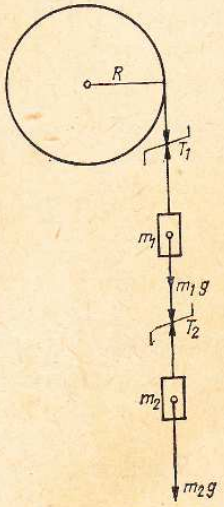


Fig. 3.6.3

3.6.3. Pe un cilindru omogen de masă $M = 2{,}00$ kg și rază $R = 1{,}00$ dm este înfășurat un fir subțire. La capătul liber al firului este atîrnat un corp de masă $m_1 = 0{,}60$ kg, de care este legat în continuare printr-un alt fir un alt corp de masă $m_2 = 0{,}40$ kg (fig. 3.6.3). Se neglijează frecările. Să se afle: accelerația a a corpurilor, accelerația unghiulară ε a cilindrului, tensiunile $T_{1,2}$, din fire, diferența ΔN dintre apăsarea statică (cilindru blocat) și cea dinamică exercitate de cilindru asupra lagărelor.

3.6.4. Pe două tambururi de raze $R_{1,2}$, fixate solidar pe același ax, sînt înfășurate în același sens sau în sensuri opuse două fire la capetele cărora atîrnă masa m_1, respectiv m_2 (fig. 3.6.4). Știind momentul de inerție total I al celor două tambururi, să se afle: accelerația unghiulară ε a tambururilor, tensiunile $T_{1,2}$ din fire, diferența ΔN dintre apăsarea statică și cea dinamică exercitate de tambururi asupra lagărelor sale.

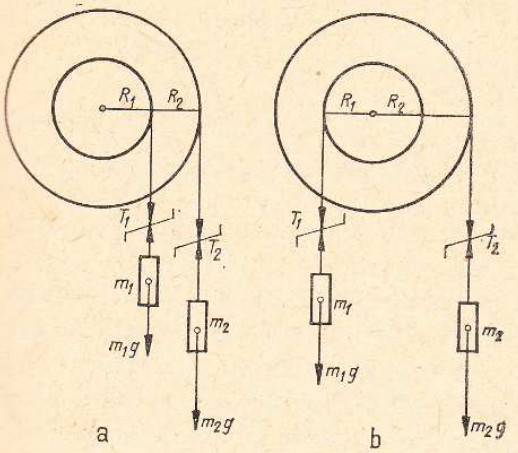


Fig. 3.6.4

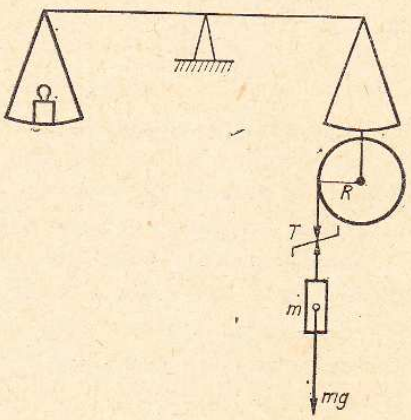


Fig. 3.6.5

3.6.5. De talerul unei balanțe este fixat un scripete de rază R și moment de inerție I, peste care este înfășurat un fir cu o masă m atîrnată la capătul liber. Balanța este echilibrată cu scripetele blocat (fig. 3.6.5). Ce greutăți trebuie adăugate la celălalt taler pentru a restabili echilibrul, atunci cînd scripetele este deblocat și sistemul se mișcă? Dar după ce firul s-a derulat și începe să se înfășoare în sens invers și masa m urcă?

3.6.6. Peste un scripete de rază R și moment de inerție I, fixat în creștetul unui plan înclinat de unghi α, este înfășurat un fir, întins apoi paralel cu planul și legat la o masă m așezată pe planul înclinat, cu coeficientul de frecare μ (fig. 3.6.6). Să se calculeze accelerația a cu care va luneca corpul pe planul înclinat și tensiunea din fir.

3.6.7. Momentul forțelor de frecare într-un lagăr este dat de formula (*N. P. Petrov*):

$$M_f = 2\pi \frac{\eta}{\delta} l r^3 \omega,$$

unde η este viscozitatea uleiului, δ — grosimea stratului de ulei, l — lungimea lagărului, r — raza axului rotorului, ω — viteza unghiulară. Știind că sub acțiunea unui moment rotitor (activ) $M = 1{,}00$ kN · m, rotorul, cu momentul de inerție $I = 20{,}0$ kg · m², atinge turația limită (maximă) $n_0 = 1\,200$ rot/min, să se afle după cît timp rotorul atinge 99% din această turație și cîte ture face în acest timp.

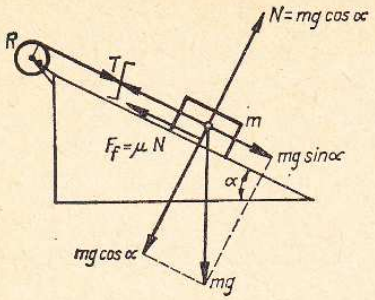


Fig. 3.6.6

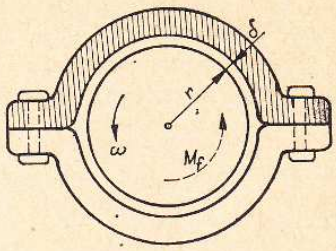


Fig. 3.6.7

3.6.8. O placă subțire omogenă dreptunghiulară, de masă $m = 0{,}300$ kg și de dimensiuni $b = 4{,}0$ dm, $h = 1{,}25$ m, se rotește în jurul laturii sale de lungime h așezate vertical (fig. 3.6.8). Fiecare element de suprafață al plăcii întîmpină din partea aerului o forță de rezistență (normală pe placă) proporțională cu aria elementului și cu pătratul vitezei sale. Cunoscînd turația inițială $n_0 = 10{,}0$ rot/s a plăcii și timpul $T = 1{,}00$ s în care această turație se reduce la jumătate, să se calculeze: momentul de inerție I al plăcii față de axa de rotație; constanta de proporționalitate k din legea amintită a forței de rezistență; numărul N de ture efectuate de placă în timpul amintit T.

3.6.9. Un lanț de masă m și lungime l, cu capetele împreunate, înfășoară periferia unui disc orizontal care se rotește în jurul axei sale verticale și antrenează prin frecare lanțul (fig. 3.6.9). La ce turație a discului lanțul se va rupe, dacă el poate suporta o forță de tracțiune maximă (de rupere) F_r?

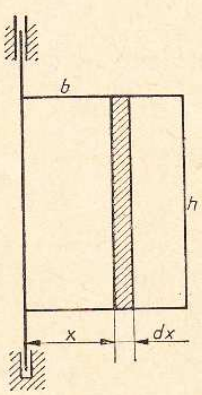


Fig. 3.6.8

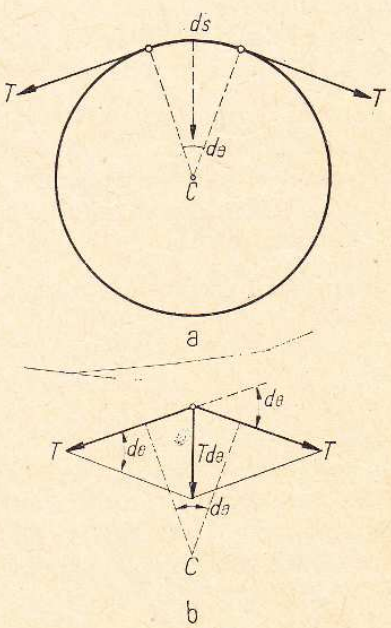


Fig. 3.6.9

3.6.10. O bară omogenă subțire de lungime l și masă m se rotește uniform cu viteza unghiulară ω într-un plan orizontal în jurul unui capăt fix (fig. 3.6.10). Să se afle tensiunea elastică F din bară la distanța x de capătul fix și reacțiunea R a lagărului. Cunoscînd secțiunea S a barei și modulul de elasticitate E, să se afle alungirea barei.

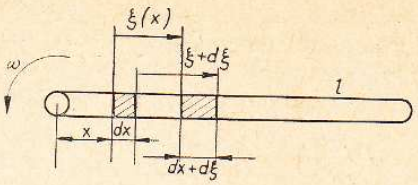


Fig. 3.6.10

3.6.11. O tijă subțire omogenă de lungime l și masă m se rotește într-un plan orizontal în jurul unui capăt fix (fig.3.6.11). Să se afle rezultanta F a forțelor aplicate tijei (egală în modul și de sens opus cu rezultanta forțelor de inerție), în momentul cînd viteza unghiulară a tijei este ω și accelerația unghiulară ε.

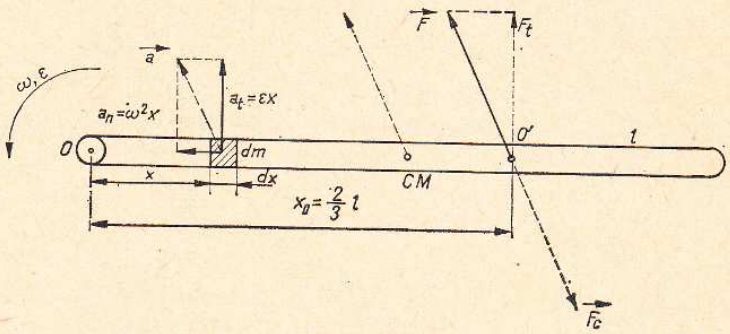


Fig. 3.6.11

3.6.12. O tijă omogenă de lungime l și masă m este prinsă la un capăt printr-o articulație de o axă verticală într-o poziție înclinată de unghi α, celălalt capăt fiind legat printr-un fir orizontal de axă (fig. 3.6.12). Să se calculeze tensiunea din fir în cazul static și în cazul cînd tija se rotește cu viteza ω = const în jurul axei verticale.

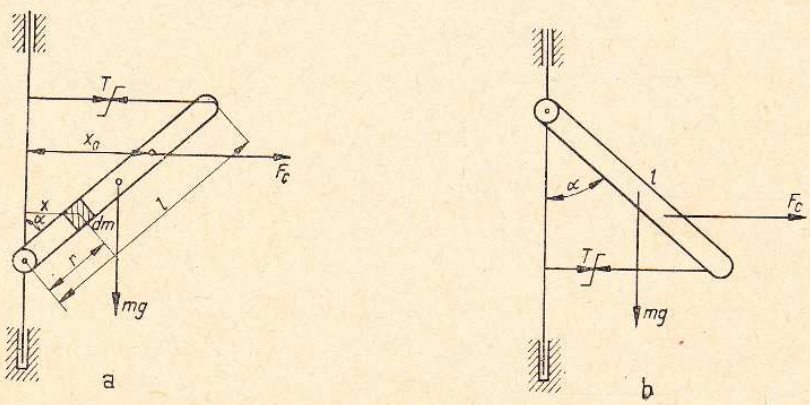


Fig. 3.6.12

3.6.13. O placă subțire (neomogenă) se rotește arbitrar în jurul unei axe perpendiculare pe planul ei. Să se arate că rezultanta forțelor de inerție trece prin centrul de oscilație al plăcii și este ehipolentă cu forța de inerție a CM al plăcii, adică a corpului presupus restrîns la CM (fig. 3.6.13).

3.6.14. O tijă subțire omogenă se poate roti liber într-un plan vertical în jurul unei articulații care împarte tija în segmente de lungime a, b. Tija este rotită uniform cu viteza unghiulară ω în jurul unei axe verticale trecînd prin articulație (fig. 3.6.14). Să se calculeze unghiul cu care deviază tija de la poziția verticală.

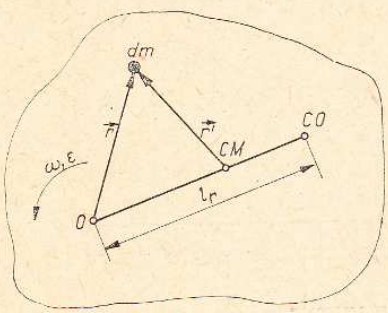


Fig. 3.6.13

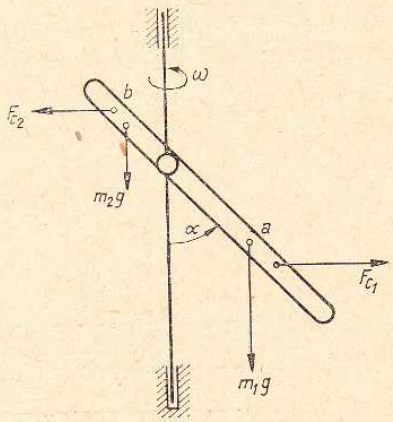


Fig. 3.6.14

3.6.15. Într-un plan vertical se află o placă subțire de masă m, care se poate roti liber în acest plan în jurul unei articulații. Placa se pune în rotație uniformă cu viteza unghiulară ω în jurul unei axe verticale trecînd prin articulație. Cunoscînd distanța R_{cm} a CM pînă la articulație și unghiul α de deviere a plăcii față de verticală (fig. 3.6.15), să se afle: 1) forța exercitată de placă asupra articulației; 2) momentul de inerție centrifugal față de axele Oxz în planul plăcii cu originea în articulație, Ox — orizontală, Oz — verticală.

3.6.16. O tijă subțire omogenă de masă m se rotește uniform cu viteza unghiulară ω în jurul unei axe verticale care face unghiul α cu tija și o

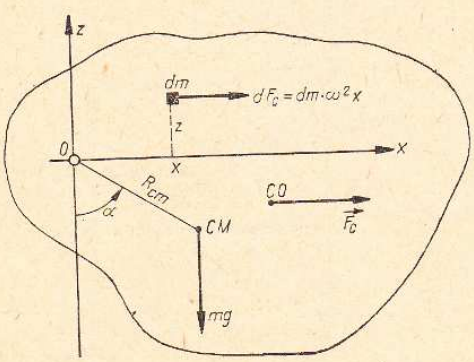


Fig. 3.6.15

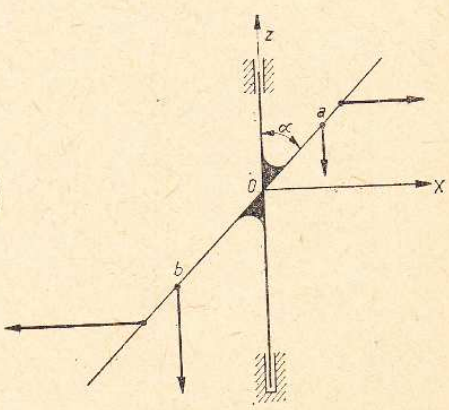


Fig. 3.6.16

împarte în segmente de lungime a, b (fig. 3.6.16). Să se afle reacțiunea exercitată de tijă asupra axei de rotație.

3.6.17. O tijă subțire omogenă de masă m este îndoită în unghi drept cu laturile a, b și este rotită cu viteza unghiulară constantă ω în planul său în jurul capătului fix O (fig. 3.6.17). Să se afle momentul încovoietor al forțelor de inerție într-o secțiune oarecare a laturii a, respectiv, b.

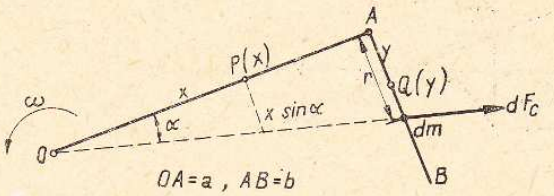


Fig. 3.6.17

3.6.18. Un disc subțire omogen de rază R și masă m se rotește uniform cu viteza unghiulară ω în jurul unei axe verticale care trece prin centrul discului și face unghiul α cu normala la disc (fig. 3.6.18). Să se calculeze momentul cuplului rezultant al forțelor exercitate de disc asupra axului.

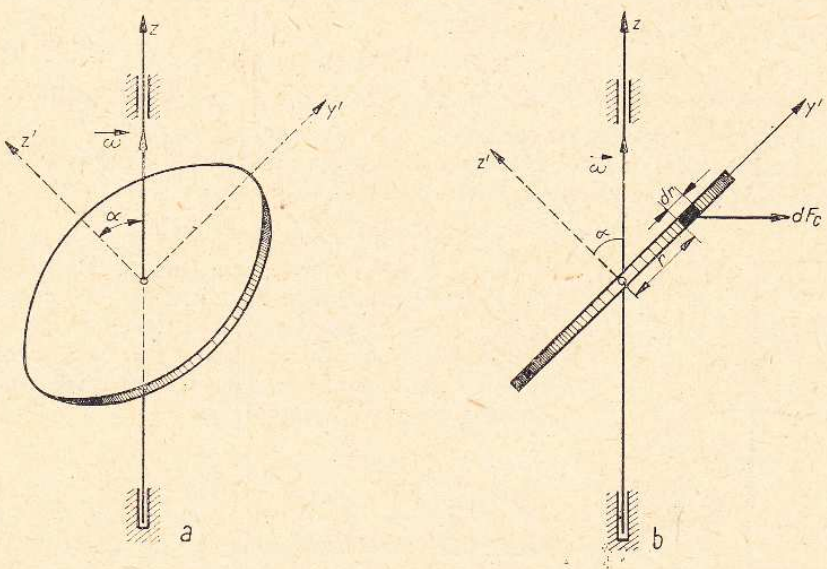


Fig. 3.6.18

3.6.19. Un corp se rotește cu viteza unghiulară constantă ω în jurul axei fixe Oz. Se cunoaște masa corpului m, momentele centrifugale față de Oz și două axe proprii Oxy perpendiculare pe Oz, și coordonatele

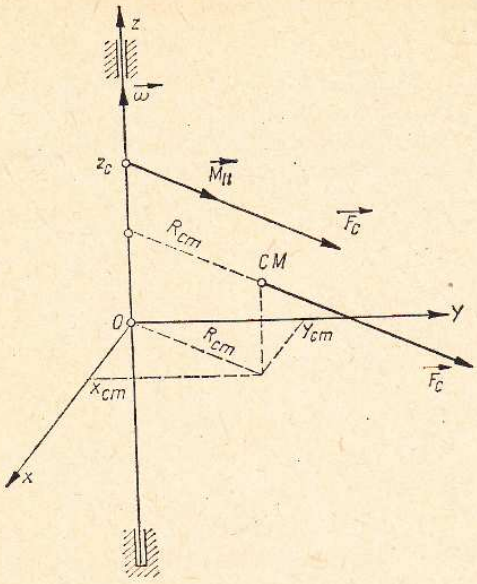


Fig. 3.6.19

(x_{cm},y_{cm}) ale CM (fig. 3.6.19). Să se arate că forțele centrifuge se reduc la o rezultantă, echipolentă cu forța centrifugă a CM, în care ar fi concentrată toată masa corpului și la un cuplu. Să se determine poziția axei centrale și cuplul respectiv.

3.7. Conservarea momentului cinetic

Dacă momentul forțelor în raport cu un pol fix este nul, momentul cinetic în raport cu același pol se conservă:

$$\vec{M} \equiv 0 \rightarrow \vec{J} = \text{const.} \tag{3.36}$$

Dacă rezultanta forțelor este nulă, CM se mișcă rectiliniu uniform, deci momentul cinetic orbital se conservă: $\vec{L} = \vec{r}_{cm} \times m\vec{v}_{cm} = \text{const.}$

În cazul rotației în jurul axei fixe, dacă momentul forțelor în raport cu axa de rotație este nul, momentul cinetic în raport cu axa se conservă:

$$M_{||} = 0 \rightarrow J_{||} = \text{const, adică } \sum I_k \omega_k = \sum I'_k \omega'_k, \tag{3.37}$$

unde I_k, ω_k sînt momentele de inerție și vitezele unghiulare ale corpurilor înainte de interacție, iar I'_k, ω'_k — respectiv, după interacție. Forțele interne nu pot modifica momentul cinetic total în raport cu axa ($J_{||} = \text{const}$), dar pot modifica energia cinetică a sistemului.

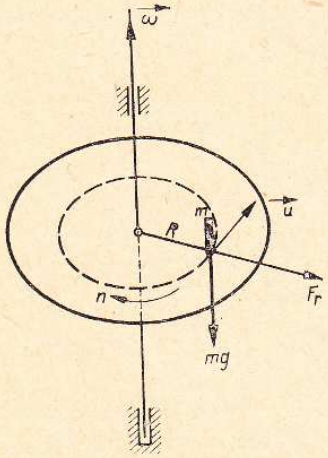


Fig. 3.7.1

* * *

3.7.1. Un om de masă m se află pe un disc orizontal (platformă) care se poate roti liber în jurul axei sale verticale fixe, avînd momentul de inerție I (fig. 3.7.1). Inițial, sistemul este în repaus, apoi omul începe să meargă pe disc cu viteza constantă u față de disc pe o circumferință de rază R. Să se afle: 1) turația n a discului; 2) deplasarea unghiulară α_0 a omului față

de pământ la o tură completă pe disc; 3) forța $\vec{F}$ exercitată de om asupra platformei (discului).

3.7.2. Pe un disc-platformă (cu CM în centrul discului) de masă M și moment de inerție I, care se poate deplasa liber orizontal, fără frecări, se află un om de masă m în repaus, la distanța R de centru. Omul începe să meargă pe disc cu viteza constantă u față de disc pe o circumferință de rază R cu centrul în centrul discului (fig. 3.7.2). Să se afle: 1) traiectoriile și vitezele unghiulare ale omului (ω_1) și discului (ω_2); 2) baza și rostogolitoarea pentru disc; 3) unghiul de rotație a discului (α_2) și deplasarea unghiulară a omului și a centrului discului (α_1) față de CM comun, dacă omul parcurge pe disc o circumferință completă; 4) lucrul mecanic W dezvoltat de om pentru a pune în mișcare sistemul.

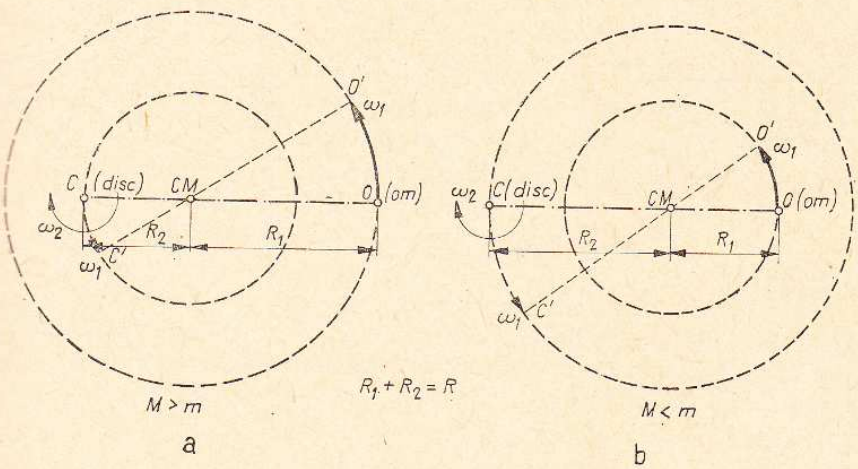


Fig. 3.7.2

3.7.3. Pe o platformă orizontală care se poate roti liber în jurul axei sale verticale fixe, cu momentul de inerție I, stă la distanța R de centru un om de masă m (considerat punct material). Omul se deplasează radial către centrul platformei cu viteza constantă u față de platformă, sistemul avînd inițial viteza unghiulară ω_0 (fig. 3.7.3). Să se calculeze în funcție de distanța r a omului pînă la centru: 1) viteza unghiulară a sistemului; 2) forța care acționează asupra omului din partea platformei; 3) puterea dezvoltată de om; 4) lucrul mecanic efectuat de om pentru a ajunge la distanța r de centrul platformei; 5) de cîte ori crește energia cinetică a sistemului datorită deplasării omului pînă în centrul discului.

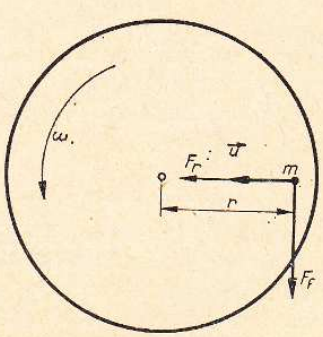


Fig. 3.7.3

3.7.4. O tijă subțire omogenă de lungime l se poate roti liber în spațiu în jurul unui capăt al său fixat într-o articulație (fig. 3.7.4). Se aduce tija în poziție orizontală și i se imprimă o viteză unghiulară inițială ω_0 în planul ~~ori~~ vertical

zontal. Să se afle unghiul minim pe care-l face tija cu verticala în timpul mișcării.

3.7.5. Să se arate că un om poate mări amplitudinea oscilațiilor sale într-un leagăn prin forțe interne (proprii), de exemplu, se ghemuiește în pozițiile extreme, coboară ghemuit pînă în punctul inferior, unde se ridică brusc în picioare și urcă astfel destins pînă în poziția extremă:

$$\frac{\sin(\alpha_2/2)}{\sin(\alpha_1/2)} = \sqrt{I_1 l_1 / I_2 l_2}$$

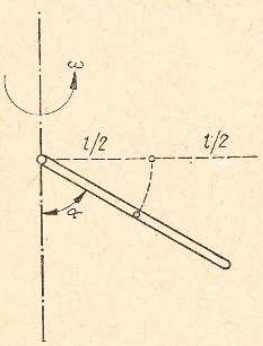


Fig. 3.7.4

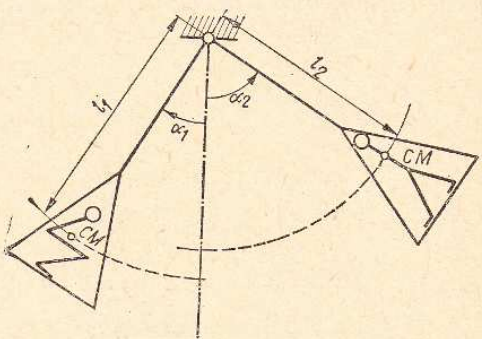


Fig. 3.7.5

unde $\alpha_{1,2}$ sînt amplitudinile consecutive, I_1, l_1 — momentul de inerție și distanța CM pînă la axa de rotație în poziția ghemuită, I_2, l_2 — respectiv, în poziția ridicată (fig. 3.7.5).

3.8. Pendulul fizic

Pendulul fizic este un corp rigid care poate oscila sub acțiunea forței de greutate în jurul unei axe orizontale de suspensie. Oscilațiile mici sînt armonice cu perioada:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{I}{mgd}} = 2\pi\sqrt{\frac{l_r}{g}}, \quad l_r = \frac{I}{md} = d + \frac{I_0}{md} > d, \tag{3.38}$$

unde I este momentul de inerție al corpului față de axa de suspensie, iar I_0 față de o axă centrală paralelă, d — distanța centrului de greutate pînă la axa de suspensie, l_r — *lungimea redusă*, adică lungimea unui pendul simplu, sincron cu cel fizic. La distanța l_r de axa de suspensie se află centrul oscilațiilor.

* * *

3.8.1. Un disc omogen și un cerc de butoi, ambele de rază R, sînt suspendate la margine pe un cui bătut în perete. Să se afle perioada micilor oscilații în planul vertical paralel cu peretele, precum și lungimea redusă. Cum se schimbă perioada cercului, dacă din el se taie o parte și restul se suspendă simetric? (fig. 3.8.1).

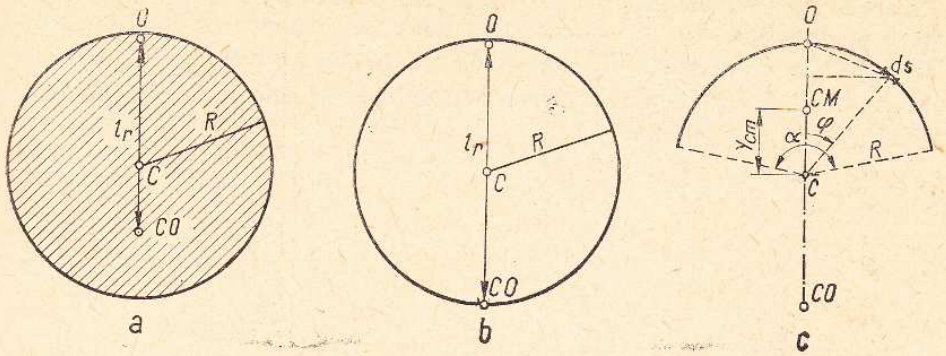


Fig. 3.8.1

3.8.2. Să se afle perioada micilor oscilații ale unei bare subțiri omogene de lungime l, suspendată la o distanță x de centrul barei. Care este perioada minimă T_m și pentru ce distanță x_m? (fig. 3.8.2.)

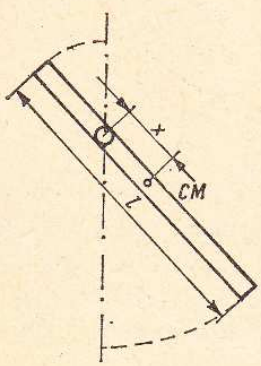


Fig. 3.8.2

3.8.3. O bară subțire omogenă de masă m și lungime l oscilează liber cu amplitudinea unghiulară α în planul vertical în jurul capătului superior fixat într-o articulație (fig. 3.8.3). Să se afle în funcție de unghiul de deviație θ; 1) viteza și accelerația unghiulară a barei; 2) forța de presiune exercitată de bară asupra articulației; 3) momentul încovoietor la distanța x de articulație. Care este secțiunea periculoasă?

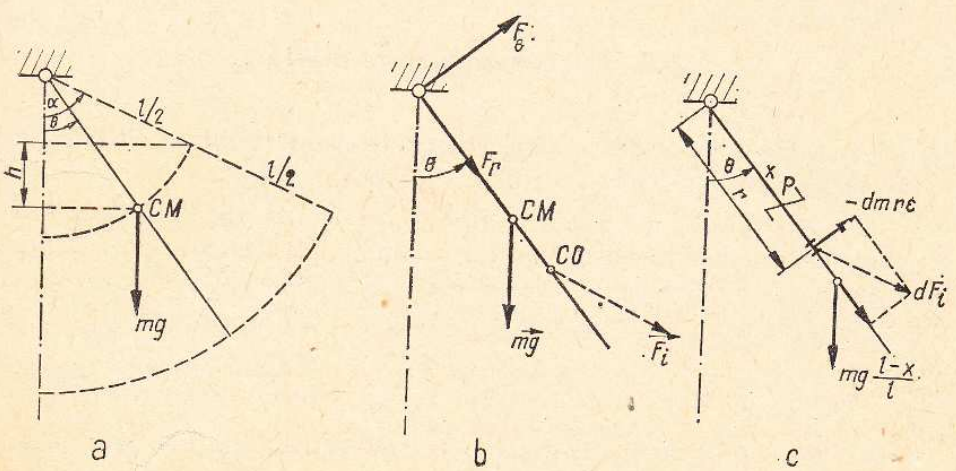


Fig. 3.8.3

3.8.4. Să se arate că perioada oscilațiilor unui pendul fizic nu se schimbă dacă în centrul de oscilație se adaugă o masă punctiformă arbitrară (fig.3.8.4). Să se afle la ce distanță R_m de CM al pendulului de masă m și moment de inerție central I_0, trebuie să treacă axa de rotație pentru ca perioada oscilațiilor mici să fie minimă.

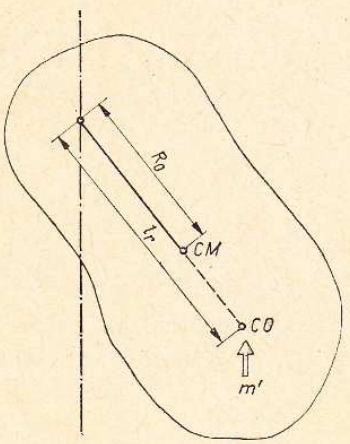


Fig. 3.8.4

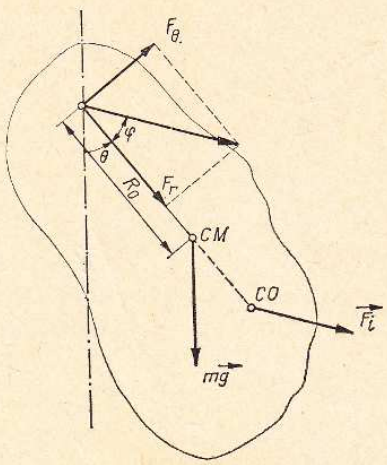


Fig. 3.8.5

3.8.5. Un pendul fizic de masă m, moment de inerție I față de axa de suspensie și distanța R_0 a CM pînă la axa de suspensie, oscilează cu amplitudinea unghiulară α (fig. 3.8.5). Să se exprime în funcție de unghiul de deviere θ: 1) viteza și accelerația unghiulară a pendulului; 2) forța exercitată de pendul asupra axului de suspensie; 3) unghiul dintre reacțiunea axului și direcția spre CM.

3.9. Mișcarea plan-paralelă

Mișcarea rigidului se descompune într-o mișcare de translație a CM în care ar fi concentrată toată masa corpului și ar fi aplicate acolo toate forțele, $\vec{F} = m\vec{a}_{cm}$ și o mișcare de rotație în jurul unei axe trecînd prin CM, $I\varepsilon = M$. Se poate considera de asemenea mișcarea rigidului ca o rotație pură în jurul axei instantanee de rotație; atunci $I'\varepsilon = M'$, unde I' este momentul de inerție față de axa instantanee și M' momentul față de această axă.

* * *

3.9.1. Peste un scripete de masă m, moment de inerție I și rază R este înfășurat un fir. Un capăt al firului este prins de tavan, iar celălalt are atîrna

un corp de masă M, ca în figura 3.9.1. Să se afle accelerația cu care coboară scripetele și tensiunile din cele două fire.

Aplicație numerică: scripetele sub formă de disc omogen de masă $m = 0{,}300$ kg, $M = 0{,}100$ kg.

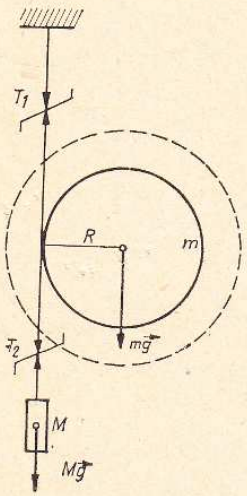


Fig. 3.9.1

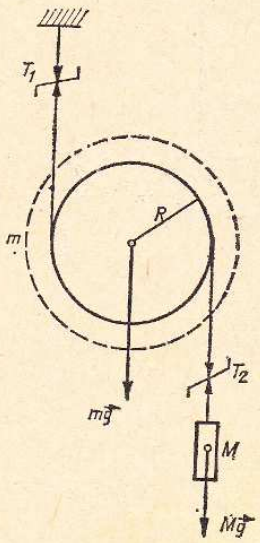


Fig. 3.9.2

3.9.2. Peste un scripete de masă m, moment de inerție I și rază R sînt înfășurate simetric în sensuri opuse două fire, unul fiind fir de suspensie, iar celălalt avînd atîrnată la capăt o masă M ca în figura 3.9.2. Să se afle accelerația scripetului și tensiunile din cele două fire.

Aplicație numerică: scripete sub formă de cerc cu spițe fine, astfel încît $I = mR^2$, $m = 0{,}200$ kg.

3.9.3. Tija unui disc Maxwell are un canal prin care este trecut un fir cu o masă m la capăt, ca în figura 3.9.3. Masa discului Maxwell este M, momentul de inerție I și raza tijei r. Să se afle accelerația discului și tensiunea din firul său de suspensie.

Aplicație numerică: $m = 0{,}200$ kg, $M = 0{,}800$ kg, $I = 0{,}90 \cdot 10^{-3}$ kg $\cdot$ m^2, $r = 3{,}0$ mm.

3.9.4. Două discuri Maxwell identice, fiecare de masă m, moment de inerție I și raza tijei r, sînt legate unul după altul ca în figura 3.9.4 și lăsate liber. Să se afle accelerațiile discurilor și tensiunile din fire.

Aplicație numerică: $I = 0{,}90 \cdot 10^{-3}$ kg $\cdot$ m^2, $m = 1{,}00$ kg, $r = 3{,}0$ mm.

3.9.5. Peste un scripete de inerție neglijabilă, care se rotește fără frecări în jurul axei sale orizontale fixe, este trecut un fir. De un capăt al firului este legat un corp de masă m, iar celălalt capăt este înfășurat peste un tambur de aceeași masă m, de rază R și de moment de inerție I (fig. 3.9.5). 1) Să se calculeze accelerația tamburului și tensiunea din fir. 2) Cît devine această accelerație dacă corpul de la celălalt capăt al firului se dezleagă și în locul său se trage în jos cu o forță egală cu greutatea corpului dezlegat?

Aplicație numerică: tamburul sub formă de cilindru omogen, $m = 0{,}200$ kg.

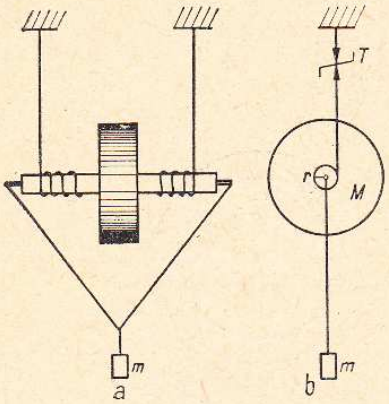


Fig. 3.9.3

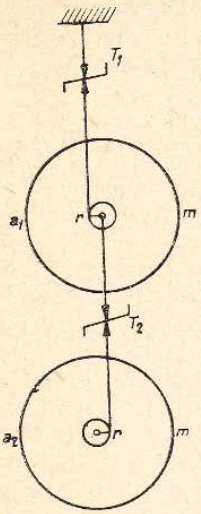


Fig. 3.9.4

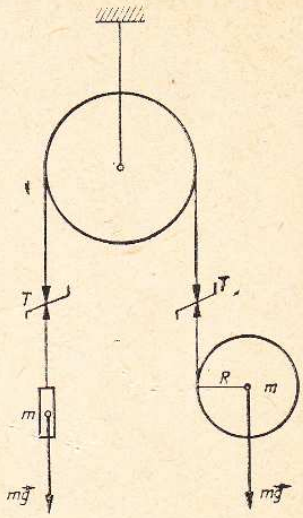


Fig. 3.9.5

3.9.6. O sferă omogenă de masă $m = 1{,}00$ kg se rostogolește fără lunecare pe un plan orizontal cu viteza $v = 10{,}0$ cm/s, lovește un perete și se întoarce rostogolindu-se fără lunecare cu viteza $v' = 8{,}0$ cm/s. Să se afle cantitatea de căldură degajată prin ciocnire (fig. 3.9.6).

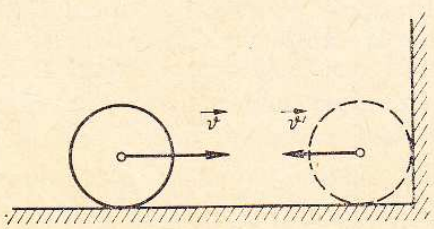


Fig. 3.9.6

3.9.7. Un cilindru omogen rigid de masă $m = 2{,}00$ kg și rază $R = 4{,}9$ cm, căruia i se imprimă o turație $n = 15{,}0$ rot/s, este așezat pe o masă orizontală rigidă cu coeficientul de frecare la lunecare $\mu = 0{,}10$ și lăsat liber. Să se afle: 1) după cît timp mișcarea cilindrului trece în rostogolire fără lunecare; 2) cîte rotații efectuează cilindrul în acest timp; 3) cîtă căldură se degajă în acest timp; 4) ce mișcare și ce turație are cilindrul după acest timp.

3.9.8. Pe un cilindru de masă m, rază R și moment de inerție I este înfășurat, pe o porțiune cilindrică de rază r, un fir tras de forțele orizontale constante $F_{1,2}$ (fig. 3.9.8). Care este condiția de rostogolire fără lunecare a cilindrului pe planul orizontal și care este accelerația cilindrului în cazul rostogolirii fără lunecare și cu lunecare? Unde este axa instantanee de rotație în ultimul caz? Care sînt condițiile ca cilindrul să fie în repaus?

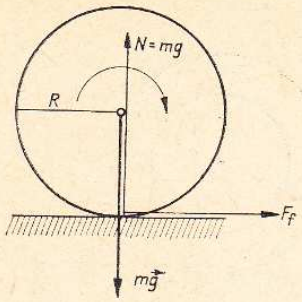


Fig. 3.9.7

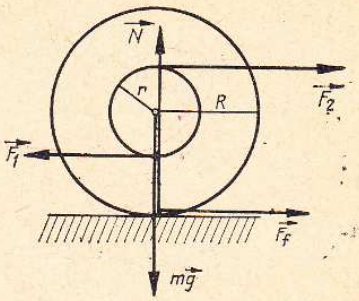


Fig. 3.9.8

Aplicație numerică : cilindru omogen, $m = 1{,}00$ kg, $R = 5{,}0$ cm, $r/R = 1/2$, $\mu = 0{,}10$, *a*) $F_1 = 1{,}00$ N, $F_2 = 2{,}00$ N sau *b*) $F_1 = 2{,}00$ N, $F_2 = 1{,}00$ N.

3.9.9. Peste un tambur de masă m, rază R și moment de inerție I este înfășurat un fir de care se trage cu o forță F sub un unghi α față de orizontală, ca în figurile 3.9.9 *a*, *b*. Să se stabilească în cele două variante condiția de rostogolire fără lunecare și accelerația tamburului.

Aplicație numerică: cilindru omogen de masă $m = 0{,}500$ kg, $R = 2{,}0$ cm, $F = 1{,}00$ N, $\alpha = 60°$, $\mu = 0{,}15$.

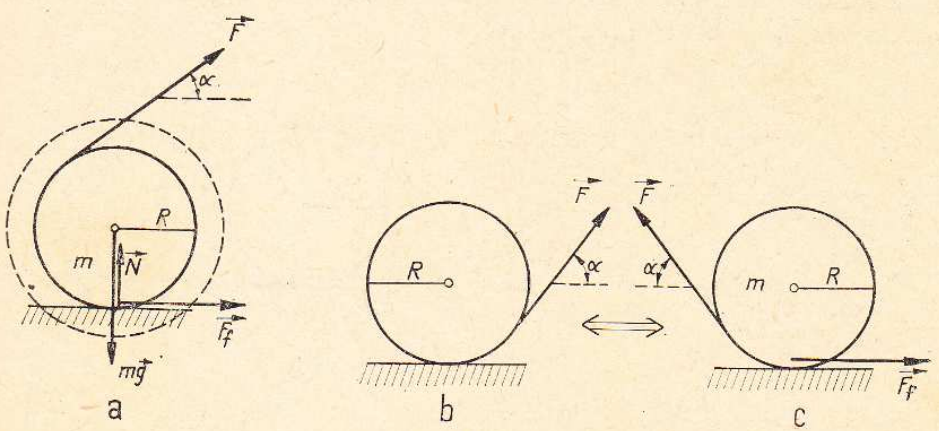


Fig. 3.9.9

3.9.10. Pe o masă orizontală se află un mosor de ață de masă m, raze r, R, moment de inerție I și coeficient de frecare la lunecare μ. De capătul firului se trage cu o forță F ce face unghiul α cu orizontala, în cele două variante din figura 3.9.10. 1) Să se calculeze, în cazul nealunecării, coeficientul de frecare minim necesar pentru ca mosorul să nu lunece, forța de frecare, accelerația CM, accelerația unghiulară, poziția axei instantanee de rotație. 2) Se va considera separat cazul rostogolirii cu lunecare.

Aplicație numerică: $m = 0{,}100$ kg, $R = 3{,}00$ cm, $r/R = 1/2$, $I = \frac{1}{3} mR^2$, $F = 0{,}40$ N, $\mu = 0{,}20$, *a*) $\alpha = 60°$, respectiv, *b*) $\alpha = 120°$.

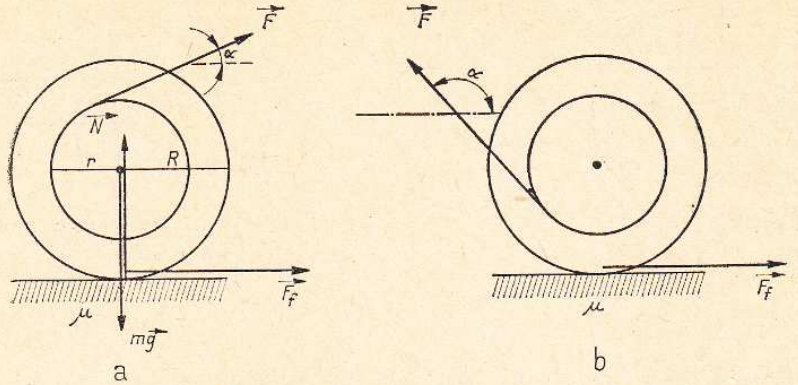


Fig. 3.9.10

3.9.11. Pe un disc de masă m, rază R și moment de inerție I este înfășurat un fir întins orizontal ca în cele două variante din figura 3.9.11 (firul nu se freacă de masă), apoi trecut peste un scripete de inerție neglijabilă și legat la capăt de o masă M. Să se calculeze, în cazul nealunecării și al lunecării: forța de frecare, tensiunea din fir, accelerația discului.

Aplicație numerică: cilindru omogen de masă $m = 0{,}800$ kg și rază $R = 3{,}00$ cm, $M = 0{,}300$ kg, $\mu = 0{,}10$.

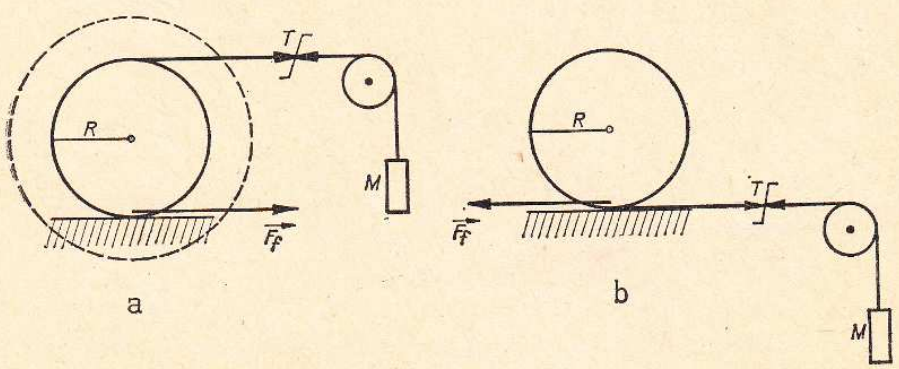


Fig. 3.9.11

3.9.12. Pe o masă orizontală este așezat un mosor de ață de masă m, raze r, R și moment de inerție I. Firul este întins orizontal în cele două variante din figură și trecut peste un scripete de inerție neglijabilă, la capătul firului fiind atîrnată o masă M. Să se calculeze: 1) forța de frecare și condiția de nealunecare; 2) acccelerația CM al mosorului; 3) accelerația unghiulară; 4) tensiunea din fir; 5) accelerația corpului M; 6) distanța pînă la CM al axei instantanee de rotație.

Aplicație numerică: $m = 1{,}00$ kg, $r = 5{,}0$ cm, $R = 10{,}0$ cm, $I = 1{,}00 \cdot 10^{-3}$ kg·m², $M = 100$ g, $\mu = 0{,}040$.

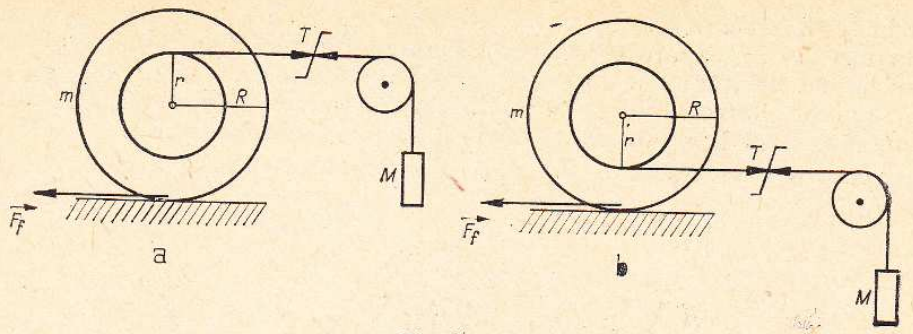


Fig. 3.9.12

MIȘCAREA PLAN-PARALELĂ PE PLANUL ÎNCLINAT

3.9.13. Pe un plan înclinat de unghi α se rostogolește liber în jos un corp rotund omogen (cilindru sau sferă) de masă m, rază R și moment de inerție central I. Să se afle: 1) forța de frecare și coeficientul de frecare la lunecare minim necesar pentru ca corpul să nu lunece; 2) accelerația CM; 3) accelerația unghiulară; 4) distanța axei instantanee de rotație pînă la CM al corpului.

Aplicație numerică: sferă, $m = 1{,}00$ kg, $R = 0{,}100$ m, $\mu = 0{,}40$.

3.9.14. Doi cilindri de aceeași masă, aceeași lungime și aceeași rază exterioară, însă unul plin, de densitate ρ_1, iar celălalt gol, de densitate ρ_2 (a pereților) se rostogolesc de la aceeași înălțime pe un plan înclinat, avînd același coeficient de frecare la lunecare pe plan. Care este raportul timpurilor de coborîre?

Aplicație numerică: $\rho_1/\rho_2 = 2/3$.

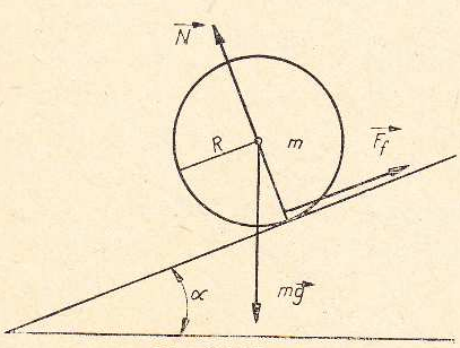


Fig. 3.9.13

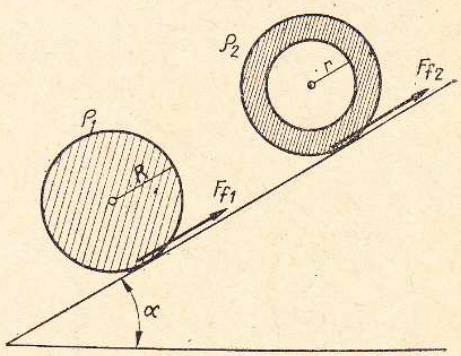


Fig. 3.9.14

3.9.15. Trei cilindri de aceeași masă, de acecași lungime și de aceeași rază exterioară se rostogolesc liber în jos pe un plan înclinat de unghi α. Primul cilindru este gol, de densitate ρ_1 (a pereților), al doilea este plin, omogen, de densitate ρ_2, iar al treilea are o cavitate exact ca la primul, dar umplută cu un lichid de aceeași densitate ρ_2 ca pereții (se neglijează frecarea lichidului cu pereții). Să se afle: 1) coeficientul de frecare la lunecare minim necesar pentru ca nici unul din cilindri să nu lunece; 2) accelerațiile CM ale cilindri-

lor în cazul nealunecării; 3) rapoartele reciproce ale acceleraţiilor unghiulare ale cilindrilor în cazul rostogolirii cu lunecare a tuturor cilindrilor, considerînd coeficientul de frecare la lunecare acelaşi pentru toţi cilindrii; 4) forţa de interacţiune dintre lichid şi pereţi în cazul lunecării respectivului cilindru, cunoscînd masa lichidului m_l şi unghiul de frecare la lunecare f.

Aplicaţie numerică: $\alpha = 30°$, $\rho_1/\rho_2 = 2$, $m_l = 0{,}100$ kg, $f = 30°$.

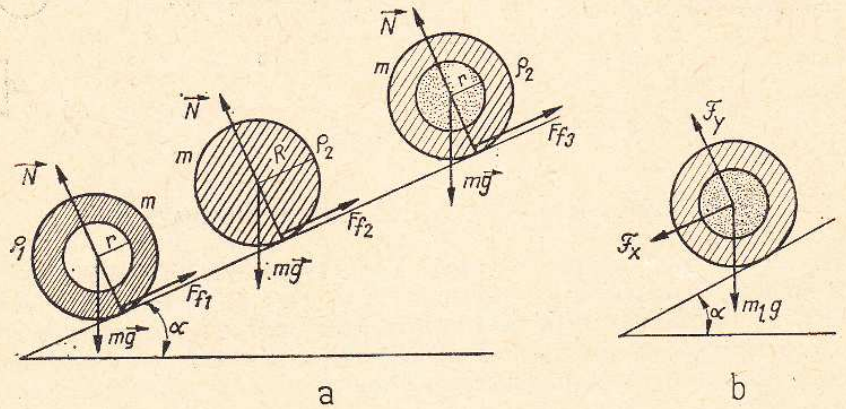


Fig. 3.9.15

3.9.16. Pe un plan înclinat de unghi α este aşezat un corp rotund omogen (de exemplu, cilindru, sferă) de masă m, rază R şi moment de inerţie central I. Firul este întins paralel cu planul (în varianta *b*, firul nu freacă cu planul), trecut peste un scripete fără inerţie, la capăt fiind atîrnată o masă M, ca în figură. Să se calculeze: 1) forţa de frecare şi coeficientul de frecare la lunecare minim necesar pentru ca corpul să nu lunece; 2) acceleraţia CM; 3) acceleraţia unghiulară; 4) tensiunea din fir; 5) acceleraţia corpului M; 6) poziţia axei instantanee de rotaţie.

Aplicaţie numerică: sferă, $m = M$, $\alpha = 30°$, $\mu = 0{,}20$.

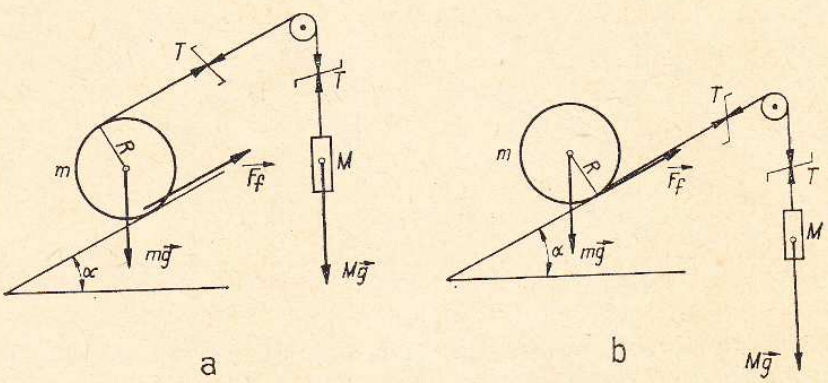


Fig. 3.9.16

3.9.17. Pe un plan înclinat de unghi α este aşezat un mosor de aţă de masă m, raze r, R şi moment de inerţie central I. Firul este întins paralel cu planul, trecut peste un scripete de inerţie neglijabilă, la capătul firului fiind

atîrnată o masă M, ca în figură. Să se calculeze: 1) forța de frecare și coeficientul de frecare la lunecare minim necesar pentru ca mosorul să nu lunece; 2) accelerația CM; 3) accelerația unghiulară; 4) tensiunea din fir; 5) accelerația corpului M; 6) poziția axei instantanee de rotație.

Aplicație: $I = mr^2$, $M = m$, $r/R = 1/2$, $\alpha = 30°$, $\mu = 0{,}30$.

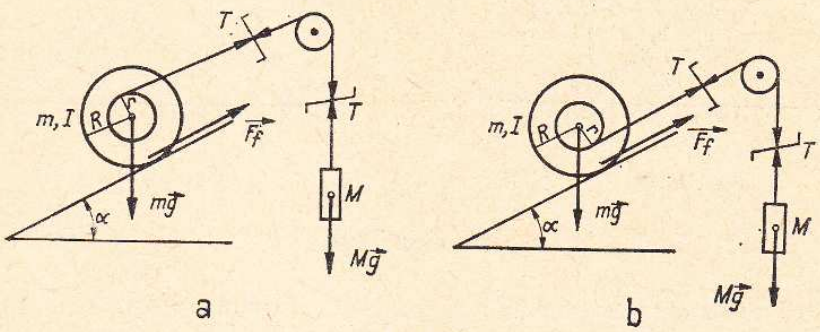


Fig. 3.9.17

* * *

3.9.18. Un corp rotund omogen (sferă, cilindru) de masă m, rază R și moment de inerție I este așezat (cu coeficient de frecare la lunecare μ) pe o scîndură de masă m', așezată la rîndul ei pe o masă fixă cu coeficientul de frecare la lunecare μ'. Scîndura este trasă orizontal cu o forță F astfel încît lunecă pe masă.

Să se calculeze: 1) forța de frecare dintre corp și scîndură și condiția de nealunecare a corpului pe scîndură; 2) accelerațiile scîndurii și corpului; 3) accelerația unghiulară a corpului; 4) poziția axei instantanee de rotație a corpului.

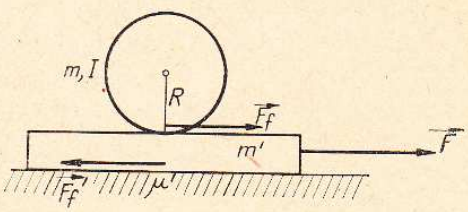


Fig. 3.9.18

Aplicație numerică: sferă, $m = 1{,}00$ kg, $m' = 4{,}00$ kg, $F = 24{,}8$ N, $\mu = \mu' = 0{,}20$.

3.9.19. O bară omogenă de greutate P se sprijină cu un capăt pe podea fără frecare, formînd un unghi α_0 cu podeaua. Să se determine pentru momentul cînd bara începe să cadă pornind din repaus: 1) forța exercitată de bară asupra podelei; 2) accelerația CM; 3) accelerația unghiulară. 4) Să se afle traiectoria capătului superior al barei; 5) viteza unghiulară a barei în funcție de unghiul α format de bară cu podeaua.

3.9.20. O bară omogenă de lungime l și masă m lunecă fără frecare cu capetele sale pe o podea și pe un perete vertical. Inițial, bara este în repaus formînd un unghi θ_0 cu peretele. Să se afle în funcție de unghiul θ: 1) viteza și accelerația unghiulare ale barei; 2) reacțiunea peretelui și a podelei; 3) unghiul θ' în momentul cînd bara se desprinde de perete; 4) reacțiunea podelei și accelerația CM al barei în acest moment; 5) viteza unghiulară după desprinderea de perete.

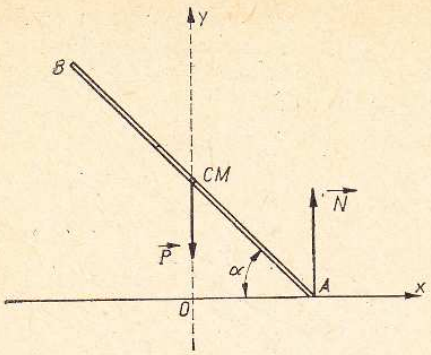


Fig. 3.9.19

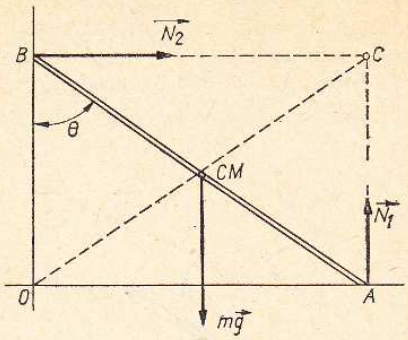


Fig. 3.9.20

3.10. Oscilații

Pentru un sistem (corp) cu un singur grad de libertate, descris de o singură coordonată (liniară sau unghiulară) q, energia potențială și energia cinetică pentru oscilații mici în jurul poziției de echilibru sînt de forma:

$$E_p = \frac{1}{2} kq^2,\ E_c = \frac{1}{2} \mu \dot{q}^2, (\dot{q} = \mathrm{d}q/\mathrm{d}t), \tag{3.39}$$

unde k este constanta cvasielastică (forța sau momentul: $F = -\mathrm{d}E_p/\mathrm{d}q = -kq$), μ — constanta masei sau a momentului de inerție (impulsul sau momentul: $p = \mathrm{d}E_c/\mathrm{d}\dot{q} = \mu\dot{q}$).

Perioada micilor oscilații în jurul poziției de echilibru:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{\mu}{k}}. \tag{3.40}$$

* * *

3.10.1. O bară omogenă de masă m este suspendată în poziție orizontală de două fire paralele verticale de lungime l fiecare, fixate la capetele barei. Să se afle: 1) perioada micilor oscilații ale barei în planul vertical definit de bară și firele de suspensie; 2) perioada micilor oscilații ale barei într-un plan vertical perpendicular pe bară; 3) perioada micilor oscilații de răsucire în jurul axei verticale de simetrie. 4) Bara fiind acum în repaus, se rupe unul din firele de suspensie; care va fi atunci tensiunea în celălalt fir, în acel moment?

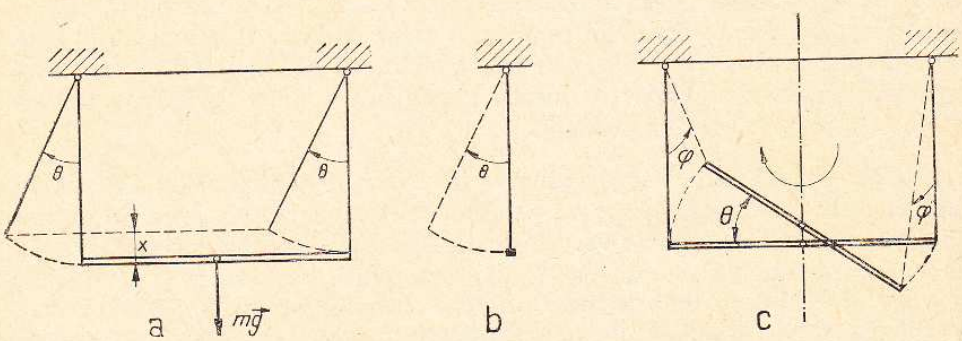


Fig. 3.10.1

3.10.2. Peste un scripete de rază R și moment de inerție I este trecut, fără lunecare, un fir care are la un capăt atîrnată o masă m, iar la celălalt capăt este prins de un resort cu constanta elastică k, a cărui cealaltă extremitate este fixă (ca în figură). Să se calculeze perioada micilor oscilații ale corpului m.

3.10.3. Un cilindru de rază R are CM la distanța $r_0 = OC$ de axa cilindrului și raza de girație r_g față de axa centrală paralelă cu generatoarea. El este așezat în repaus pe un plan orizontal suficient de rugos. Să se afle: 1) viteza unghiulară a cilindrului în funcție de unghiul θ dintre raza OC și verticală, unghiul inițial fiind θ_0; 2) perioada micilor oscilații ale cilindrului în jurul poziției de echilibru.

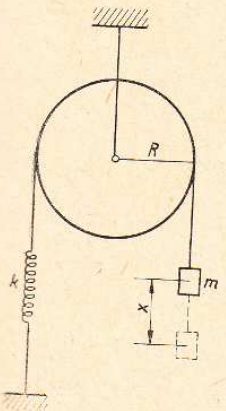
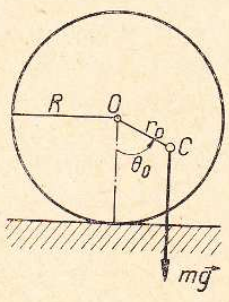


Fig. 3.10



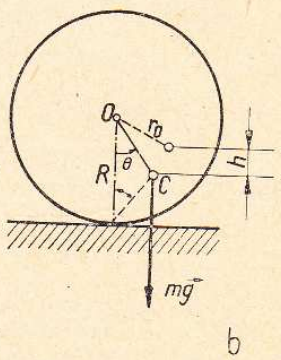


Fig. 3.10.3

3.10.4. Peste un cilindru orizontal fix de diametru D este așezată transversal și orizontal, în echilibru, o scîndură omogenă de lungime l și grosime b. Frecarea dintre scîndură și cilindru este suficient de mare astfel încît scîndura nu lunecă pe cilindru. Să se afle: 1) condiția ca echilibrul scîndurii să fie stabil; 2) perioada micilor oscilații ale scîndurii în jurul poziției de echilibru (în cazul echilibrului stabil).

3.10.5. În interiorul unui semicilindru orizontal fix, de rază R, se rostogolește fără lunecare un corp rotund omogen de masă m, rază r și moment de inerție I. Poziția inițială este dată de unghiul θ_0 dintre verticală și raza cilindrului spre centrul corpului. Să se afle în funcție de unghiul θ: 1) reac-

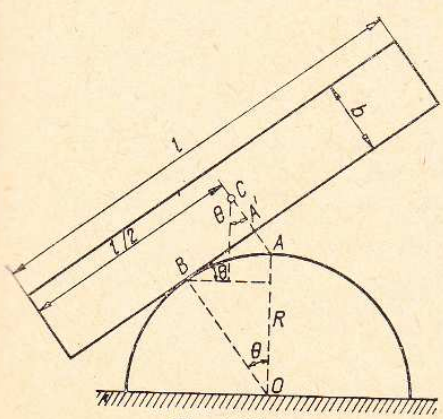


Fig. 3.10.4

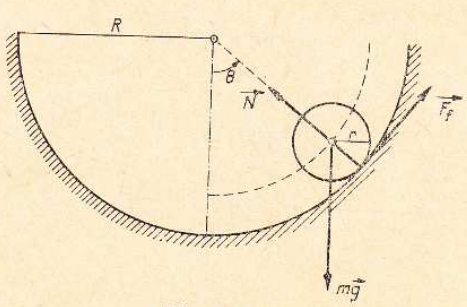


Fig. 3.10.5

țiunea normală a cilindrului; 2) forța de frecare și condiția de nealunecare a corpului; 3) viteza unghiulară și accelerația unghiulară de rostogolire a corpului; 4) perioada micilor oscilații ale corpului; 5) perioada acestor oscilații în absența frecării.

3.11. Ciocniri

La ciocniri apar forțe interne între corpuri (în punctele de contact). Cum rezultanta forțelor interne este nulă și momentul rezultant al forțelor interne este nul, forțele interne nu pot modifica impulsul *total* și momentul cinetic *total* ale sistemului de corpuri care se ciocnesc (modifică desigur puternic impulsul sau momentul cinetic al fiecărui corp în parte!).

Impulsul forțelor externe este egal cu variația impulsului total al sistemului:

$$\vec{H} = \Delta\vec{P} = m\Delta\vec{v}_{cm}, \quad \vec{H} = \Sigma\int\vec{F}\,dt. \tag{3.41}$$

Momentul impulsului forțelor externe este egal cu variația momentului cinetic total al sistemului:

$$\vec{K} = \Delta\vec{J}, \quad \vec{K} = \Sigma\int\vec{r}\times\vec{F}\,dt = \Sigma\int\vec{r}\times d\vec{H} \cong \Sigma\,\vec{r}\times\vec{H}. \tag{3.42}$$

Ultima ecuație se poate scrie față de un pol fix sau față de CM al sistemului.

De obicei (în afară de cazul lovirilor exterioare), forțele externe sînt mult mai mici decît forțele interne datorate ciocnirii, de aceea, variația impulsului total (nu a fiecărui corp în parte) și variația momentului cinetic total (nu a fiecărui corp în parte), în timpul scurt cît durează ciocnirea dintre corpuri, pot fi neglijate și putem scrie conservarea impulsului total și a momentului cinetic total ale sistemului (imediat înainte și imediat după ciocnire).

* * *

3.11.1. Un om ține în mînă de un capăt o tijă subțire uniformă de lungime l. La ce distanță de mînă trebuie lovită tija pentru ca omul să nu simtă lovitura?

3.11.2. Un punct O al unei plăci plane, care se mișcă în planul său orizontal, este la un moment dat fixat. Înainte de fixare, viteza punctului O era v_0 și

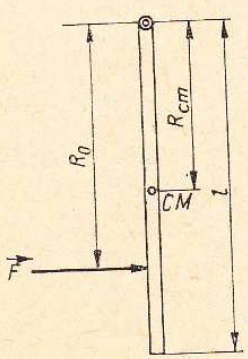


Fig. 3.11.1

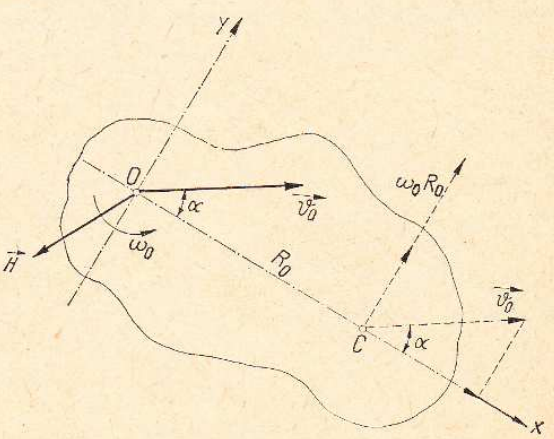


Fig. 3.11.2

viteza unghiulară de rotație a plăcii ω_0. Să se afle viteza unghiulară de rotație a plăcii imediat după fixarea punctului O. Se dă raza de girație r_g a plăcii față de O, distanța R_0 dintre O și centrul de masă C și unghiul α dintre $\vec{v}_0$ și $\overline{OC}$.

3.11.3. O bară uniformă de lungime l și greutate G este fixată printr-o articulație la capătul superior. Aplicînd la distanța h de articulație, perpendicular pe bară, un impuls, bara se depărtează cu un unghi maxim α. Să se calculeze impulsul aplicat.

Aplicație numerică: $G = 3{,}5$ N, $l = 1{,}20$ m, $h = 0{,}60$ m, $\alpha = 60°$.

3.11.4. O placă plană se află în repaus în planul orizontal. Raza de inerție a plăcii în raport cu CM este r_g. Se aplică plăcii un impuls orizontal cu brațul b față de CM. Să se afle poziția centrului instantaneu de rotație după lovire. Unde trebuie fixat, imediat după aceasta, un punct al plăcii pentru ca ea să se oprească?

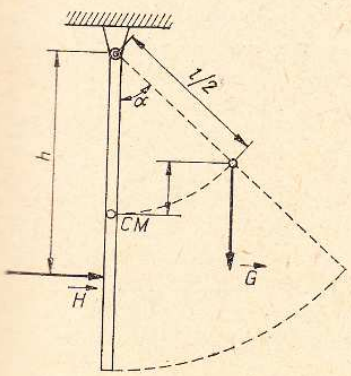


Fig. 3.11.3

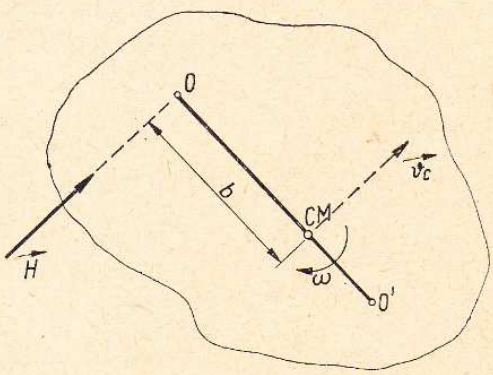


Fig. 3.11.4

3.11.5. O bară neuniformă de masă M se poate roti liber în jurul unei articulații la capătul superior. La distanța h de la articulație, ea este lovită perpendicular de un glonț, de masă m, care rămîne în bară. Știind unghiul maxim α de deviere a barei, distanța R_0 a CM al barei pînă la articulație și momentul de inerție I față de articulație, să se afle viteza glonțului.

Aplicație numerică: bară omogenă de lungime $l = 1{,}20$ m, $h = \frac{2}{3}\, l$, $M = 2{,}00$ kg, $m = 10{,}0$ g, $\alpha = 60°$.

3.11.6. O bară omogenă de lungime l cade liber în poziție orizontală de la înălțimea h peste o piedică, aflată la distanța b de centrul barei. 1) Să se determine viteza unghiulară a barei și viteza centrului de masă, imediat după ciocnire, considerînd că bara nu se desprinde de piedică (ciocnire neelastică). 2) Care trebuie să fie distanța b, pentru ca viteza celuilalt capăt să nu se schimbe prin ciocnire?

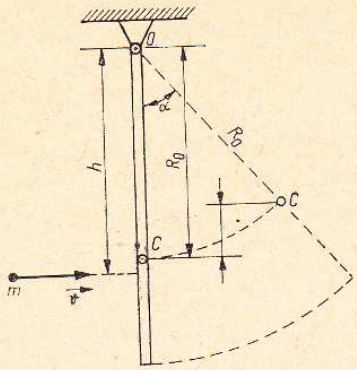


Fig. 3.11.5

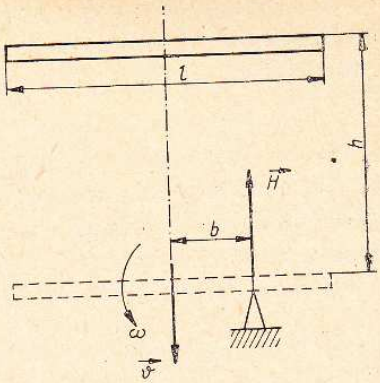


Fig. 3.11.6

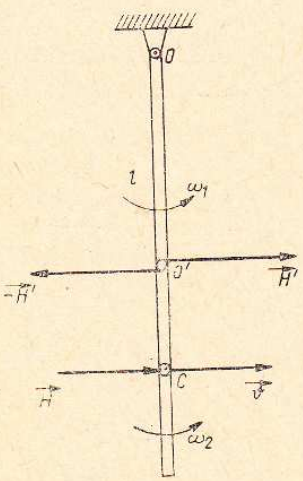


Fig. 3.11.7

3.11.7. Două bare omogene identice, fiecare de lungime l și masă m, sînt legate prin articulații ca în figură. În centrul barei inferioare se aplică un impuls H, perpendicular pe bară. Să se afle vitezele unghiulare ale barelor imediat după ciocnire, precum și viteza centrului barei inferioare.

Aplicație numerică: $l = 1{,}00$ m, $m = 0{,}150$ kg, $H = 0{,}70$ N · s.

3.11.8. Două roți dințate de raze $R_{1,2}$, momente de inerție $I_{1,2}$ și turații inițiale $n_{1,2}$ (n considerat pozitiv în sens trigonometric), avînd axele de rotație paralele, sînt la un moment dat, cuplate interior sau exterior, ca în figură. Să se afle: 1) turațiile după cuplare, 2) cantitatea de căldură degajată.

Aplicație numerică: discuri omogene, $m_1 = 0{,}40$ kg, $m_2 = m_1/4$, $R_1 = 0{,}10$ m, $R_2 = R_1/2$, $n_1 = 1\,200$ rot/s, $n_2 = 0$.

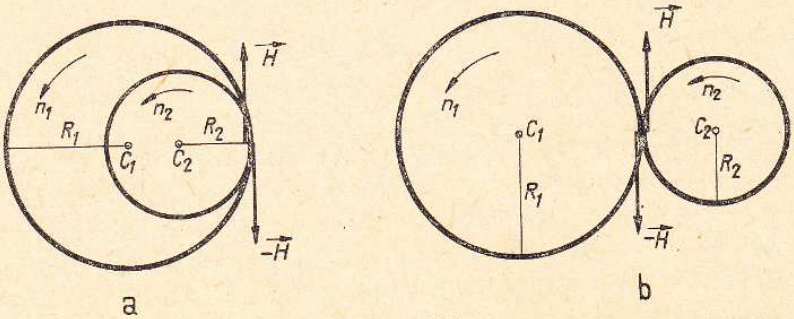


Fig. 3.11.8

3.12. Giroscop

Giroscopul este un corp care se roteşte repede în jurul unei axe de simetrie libere (axă centrală principală) de moment de inerţie maxim. El tinde să păstreze neschimbată în spaţiu direcţia axei sale de rotaţie ($\vec{\omega}$) şi este cu atît mai stabil cu cît viteza unghiulară este mai mare şi cu cît momentul de inerţie în jurul axei de rotaţie este mai mare.

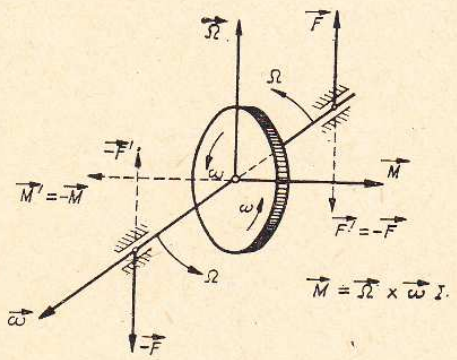


Fig. 3. XII

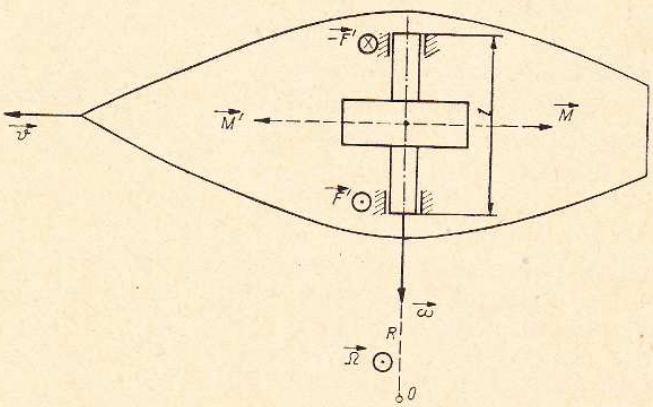


Fig. 3.12.1

Dacă se aplică giroscopului un moment $\vec{M}$, axa sa se va roti cu viteza unghiulară $\vec{\Omega}$ dată de formula ($\omega \gg \Omega$):

$$\vec{M} = \vec{\Omega} \times \vec{\omega} I. \tag{3.43}$$

Invers, dacă axa giroscopului $\vec{\omega}$ este rotită cu viteza unghiulară $\vec{\Omega}$, axa va exercita asupra lagărelor forţe de reacţiune (giroscopice) cu

momentul

$$\vec{M}' = -\vec{M} = -\vec{\Omega}\times\vec{\omega}I. \tag{3.44}$$

Trebuie urmărit cu mare atenție sensul vectorilor $\vec{\omega}$, $\vec{M}$ și $\vec{\Omega}$.

* * *

3.12.1. Rotorul orizontal al turbinei unui vapor are momentul de inerție $I = 1{,}00\ \text{t}\cdot\text{m}^2$ și turația $n = 600$ rot/min. Să se calculeze forța de presiune giroscopică asupra lagărelor, distanța dintre ele fiind $l = 1{,}00$ m, atunci cînd vaporul face un viraj de rază $R = 100$ m cu viteza $v = 36$ km/h.

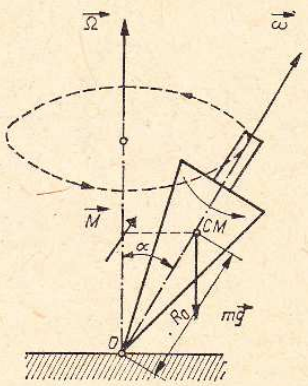


Fig. 3.12.2

3.12.2. Să se afle perioada de precesie sub acțiunea greutății a unui titirez înclinat, avînd masa $m = 200$ g, momentul de inerție $I = 2{,}00\ \text{kg}\cdot\text{cm}^2$, turație proprie $n = 20$ rot/s și distanța $R_0 = 5{,}0$ cm de la CM la punctul de sprijin.

Capitolul 4

STATICA

Condițiile de echilibru static ale unui solid rigid se scriu:

$$\vec{F}_i = 0, \quad \vec{M}_i = 0, \tag{4.1}$$

relație în care M_i sînt momentele forțelor F_i care acționează asupra corpului. Aceste ecuații vectoriale revin la șase ecuații scalare:

$$F_{i\alpha} = 0, \; M_{i\alpha} = 0, \quad \alpha = x, \; y, \; z. \tag{4.2}$$

În cazul plan se observă că momentele sînt paralele cu axa Oz și rămîn numai trei ecuații:

$$F_{ix} = 0, \quad F_{iy} = 0, \quad M_{iz} = 0. \tag{4.3}$$

În cazul punctelor materiale, ecuațiile de momente sînt satisfăcute întotdeauna.

Deformațiile elastice ascultă de legea:

$$F = -kx \tag{4.4}$$

în care F este forța de deformare elastică, $x = l - l_0$ este alungirea, iar $k = \dfrac{S}{El}$ este constanta elastică.

* * *

4.1. Între doi stîlpi verticali, de greutate G, aflați la distanța $2L$ unul de celălalt, se suspendă un felinar de greutate G_0. Firul este prins pe stîlpi la înălțimea H și face o săgeată h. Să se afle tensiunea din ancorele de fixare ale stîlpilor, știind că fac unghiul α cu solul și sînt prinse la jumătatea stîlpului, aflîndu-se în același plan cu firul. Să se afle poziția ancorelor astfel ca apăsările stîlpilor pe sol să fie strict normale.

4.2. În problema precedentă, stîlpii sînt fixați cu cîte două ancore de lungime $l = 2L$, prinse la același nivel cu firul felinarului, dar care fac un unghi β cu planul firului. Să se reia problema precedentă.

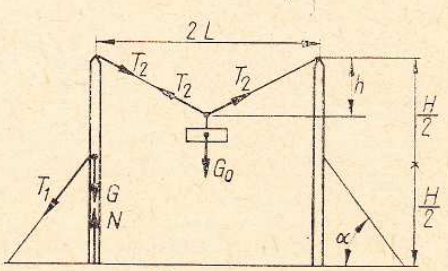


Fig. 4.1

4.3. O turbină de 10 t este puțin excentrică, avînd centrul de greutate la 1 μm de axul ei. Cunoscînd diametrul lagărelor turbinei, 200 mm și că se

realizează o frecare pe palier de $3 \cdot 10^{-4}$, să se afle unghiul cu care poate fi rotit axul, fără ca să revină la poziția de echilibru. Să se afle degajarea de căldură în fiecare secundă la o turație de 60 000 rotații/minut.

4.4. Un corp prismatic, cu secțiunea triunghi dreptunghic, este culcat pe un plan pe una din fețele catete. Să se afle poziția punctului în care acționează rezultanta apăsărilor pe suprafața de sprijin.

4.5. O scară de lungime l este rezemată de un perete vertical. Știind că scara face unghiul α cu verticala și că are același coeficient de frecare la ambele reazeme, să se afle cît de sus poate urca un om de greutate G, pe scara de greutate G_0.

4.6. Să se afle săgeata unui fir de lungime l, instalat între doi stîlpi, aflați unul față de celălat la distanța L, avînd la mijloc o greutate G. Presupunem că firul nu se rupe înainte de a atinge poziția de echilibru și neglijăm masa lui proprie.

4.7. Într-un vagon care se mișcă accelerat, se află un corp de 1 kg suspendat de un fir de polietilenă, care se rupe la un efort de 1,405 N. Să se afle accelerația la care se rupe firul.

4.8. Cu ce forță menținem constantă lungimea unei bare de secțiune S, în decursul dilatării ei termice?

4.9. Acoperișul unui hangar are o formă triunghiulară, fiind format din două plăci, așezate pe zidurile laterale, dar articulate în vîrful acoperișului. Să se găsească mărimea forței tangențiale în mortarul care fixează acoperișul pe zidurile laterale.

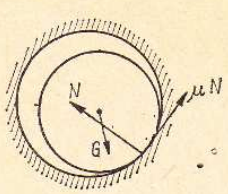


Fig. 4.3

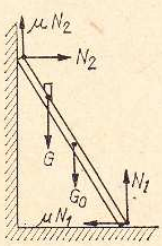


Fig. 4.5

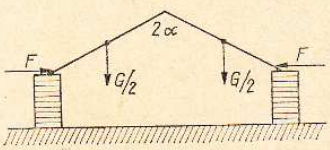


Fig. 4.9

4.10. Cineva vrea să facă un acoperiș din cărți de joc. Care este deschiderea maximă a acestuia cunoscînd coeficientul de frecare? Lungimea unei cărți este l.

4.11. Pe două resorturi de constante elastice k_1, k_2, se așază o bară de masă m și lungime l, cît distanța dintre resorturi. Unde să așezăm o masă m_0, pentru ca bara să stea orizontală?

4.12. În colțurile unui tetraedru regulat se află mase egale, fixate prin tije în centrul de simetrie al tetraedrului. Să se afle tensiunile din tije, cauzate de atracția maselor.

4.13. În colțurile unui cub se află mase egale, fixate prin tije în centrul cubului. Să se reia problema precedentă.

4.14. În problemele 12, 13, tijele de fixare sînt chiar laturile fețelor laterale; să se reia problemele în acest caz.

4.15. Să se determine accelerația de cădere a centrului de greutate al greutăților unei mașini Atwood.

4.16. Avînd un punct material pe o curbă, să se găsească condiția ca el să fie în echilibru în orice punct al curbei.

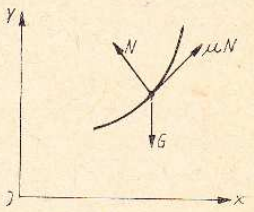


Fig. 4.16

4.17. Dintr-o sferă plină se extrage un sector sferic, avînd deschiderea la vîrf 4α. Să se afle centrul de greutate al porțiunii rămase.

4.18. Patru vase Navrom se află în următoarele poziții pe glob: 30°N, 60°V; 30°S, 0°; 45°S, 60°E; 45°N, 180°V. Să se afle centrul de greutate al flotilei, știind că vasele sînt identice.

4.19. Să se afle poziția centrului de greutate al unui cilindru drept, retezat de un plan care taie suprafața laterală, sub unghiul α, făcut cu generatoarea cilindrului.

4.20. Să se afle centrul de greutate al unei coloane de aer.

4.21. Să se reia problema precedentă pentru o emisferă terestră.

4.22. Doi cilindri sînt tangenți interior imaginînd un ax într-un lagăr. Coeficientul de frecare este μ, iar masa cilindrului interior este m. Să se găsească forța tangențială orizontală din cureaua de antrenare a axului, care deviază axul de la echilibru cu unghiul α.

4.23. Un fir trece peste doi scripeți aliniați în același plan vertical, cu axele la aceeași înălțime și distanțate cu l. Două greutăți Q se află la capetele firului, iar una P la mijlocul său. Să se găsească săgeata sa la echilibru.

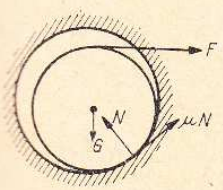


Fig. 4.22

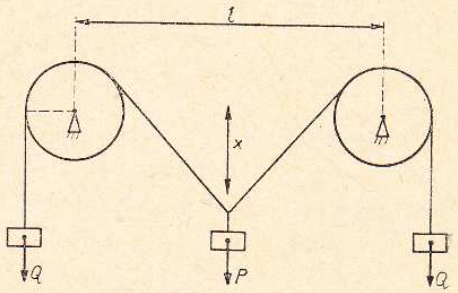


Fig. 4.23

4.24. O bilă omogenă de greutate G se sprijină pe fețele unui unghi diedru, avînd muchia orizontală și deschiderea de 90°. Fețele diedrului fac unghiul α, respectiv, $\frac{\pi}{2} - \alpha$ cu orizontala. Să se găsească forțele de apăsare pe aceste fețe.

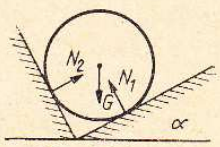


Fig. 4.24

4.25. O țeavă lungă se află în deschiderea de mărime l a unui șanț mai îngust decît diametrul ei D. Să se

găsească apăsările exercitate asupra marginilor șanțului cunoscînd greutatea G a țevii.

4.26. Într-un puț de diametru D se află fixată simetric cu patru lanțuri de lungime l, o găleată cu diametrul d și greutatea G. Știind că lanțurile sînt dispuse simetric și sînt fixate pe periferia găleții, să se găsească tensiunile din lanțuri.

4.27. O bîrnă omogenă de lungime l și greutate G se reazemă oblic, pe marginea unui zid de înălțime h, capătul inferior aflîndu-se pe planul orizontal. Dacă coeficientul de frecare μ este același la ambele reazeme, să se afle cea mai scundă poziție a bîrnei. Să se studieze și eventuala așezare a bîrnei neperpendicular pe muchia zidului.

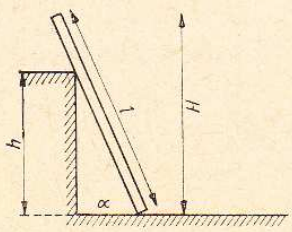


Fig. 4.27

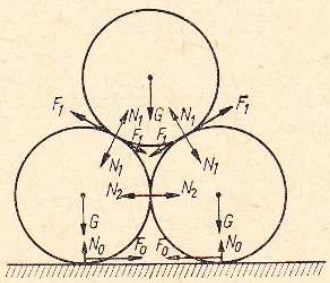


Fig. 4.28

4.28. Trei țevi de greutate G și diametru D sînt așezate astfel: două pe sol, una lîngă cealaltă și a treia deasupra, între ele. Să se găsească coeficientul de frecare minim, care asigură un sistem stabil, considerînd coeficienții de frecare μ_1 și μ_0 la cele două feluri de contacte (țeavă-țeavă; țeavă-sol).

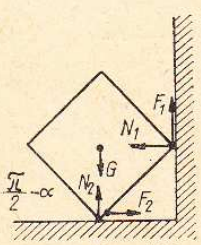


Fig. 4.29

4.29. Un cub este rezemat între un perete și sol ca în figura alăturată. Să se găsească mărimea forțelor cu care apasă asupra peretelui.

4.30. Un cub aflat în colțul unei camere este apăsat pe una din fețe cu o forță orizontală F. Să se afle apăsările produse asupra pereților, cunoscînd că frecarea este identică pe toate suprafețele de contact.

4.31. Într-o țeavă de rază R se află o scîndură de lungime L ($L < 2R$) cu latura lungă perpendiculară pe axul țevii. Cunoscînd coeficientul de frecare μ dintre pereții interiori ai țevii și scîndură, să se găsească limitele poziției de echilibru pentru scîndura deviată de la planul orizontal.

4.32. Să se găsească cel mai înalt hopa-mitică format dintr-o emisferă de rază r și densitate ρ_1 și un cilindru de aceeași rază, așezat deasupra, de densitate ρ_2.

4.33. În problema precedentă, partea de deasupra se înlocuiește cu un con din același material și raza bazei egală cu a emisferei. Să se găsească înălțimea cea mai mare a conului.

Capitolul 5

ATRACȚIA UNIVERSALĂ

5.1. Legile lui Kepler

Pe baza numeroaselor date experimentale strînse de astronomul T y c h o B r a h e (1546—1601), care au fost analizate cu multă atenție și interpretate de J o h a n n e s K e p l e r (1571—1631), acesta din urmă a descoperit legile după care se mișcă planetele, cunoscute azi sub numele de *legile lui Kepler*. Unul din enunțurile lor este următorul:

— toate planetele se mișcă pe orbite eliptice avînd Soarele în unul din focare *(legea orbitelor)*;

— raza vectoare ce unește o planetă cu Soarele, mătură arii egale în timpuri egale (viteza areolară este constantă). Această lege este echivalentă cu afirmația că viteza areolară sau momentul cinetic al planetei față de Soare este constant:

$$|\vec{L}| = \text{const.} \Rightarrow mr^2\omega = \text{const.}; \tag{5.1}$$

— pătratul perioadei de mișcare a unei planete în jurul Soarelui este proporțional cu cubul semiaxei mari a elipsei *(legea perioadelor)*, adică:

$$T^2 = \text{const.} \cdot a^3. \tag{5.2}$$

* * *

5.1.1. Perioada mișcării de rotație a unei planete în jurul Soarelui este cu 20% mai mare decît perioada mișcării de rotație a Pămîntului în jurul Soarelui. Considerăm orbitele eliptice, iar semiaxa mare a orbitei pămîntești, practic egală cu distanța medie Pămînt-Soare, mai mică decît semiaxa mare a orbitei planetei. Să se calculeze cu cît diferă semiaxele mari ale celor două orbite.

5.1.2. Axa mare a orbitei eliptice a primului satelit artificial al Pămîntului a fost mai mică decît axa mare a orbitei eliptice a celui de-al doilea stelit cu 800 km. Perioada de revoluție în jurul Pămîntului a primului satelit la începutul mișcării sale a fost $T_1 = 96{,}2$ min. Să se determine: *a)* mărimea axei mari a orbitei celui de-al doilea satelit al Pămîntului; *b)* perioada rotației sale în jurul Pămîntului.

5.1.3. Distanța minimă la care s-a aflat nava cosmică Vostok 2 față de suprafața Pămîntului a fost de 182 km, iar distanța maximă, de 244 km. Să se calculeze perioada de rotație a navei în jurul Pămîntului. Se dau: R_p, T și a (raza și semiaxa mare a orbitei lunare).

5.1.4. Un corp de masă m este supus unei forțe centrale atractive, $F = -\frac{k}{r^2}$, unde k este o constantă. La un moment dat, corpul se găsește într-o poziție extremă pe orbita sa închisă, la distanța $x_1 = 300$ km față de centrul

de forță și are viteza $v_1 = \left(\frac{k}{2mx_1}\right)^{1/2}$. Să se determine: *a*) cealaltă poziție extremă pe traiectorie; *b*) viteza în această poziție extremă dacă $v_1 = 10$ km/s.

5.2. Legea atracției universale. Cîmpul și potențialul gravitațional

Newton a fost cel care a emis ideea că aceleași legi guvernează atît mișcarea corpurilor cerești, cît și mișcarea corpurilor terestre. În acest mod a dat o bază comună mecanicii terestre și mecanicii cerești.

Pe baza legilor lui Kepler și a legii fundamentale a mecanicii, Newton a dedus *legea atracției universale* potrivit căreia, *două corpuri punctiforme se atrag cu o forță direct proporțională cu produsul maselor lor și invers proporțională cu pătratul distanței dintre ele, adică*:

$$\vec{F}_{12} = -\frac{\gamma m_1 m_2}{r_{12}^2}\frac{\vec{r}_{12}}{r_{12}}, \tag{5.3}$$

unde $\frac{\vec{r}_{12}}{r_{12}}$ este versorul după direcția ce unește cele două corpuri, iar γ este constanta gravitațională, care are valoarea:

$$\gamma = 6{,}670 \cdot 10^{-11}\ \frac{\mathrm{N}\cdot\mathrm{m}^2}{\mathrm{kg}^2}. \tag{5.4}$$

Sub forma (5.3), legea atracției universale poate fi aplicată corpurilor cerești (galaxii, stele, planete, sateliți etc.) în cazul în care acestea se află la astfel de distanțe încît pot fi considerate puncte materiale. În celelalte cazuri, corpurile se consideră ca fiind alcătuite din puncte materiale și utilizînd relația (5.3), cu ajutorul calculului integral se poate studia interacția dintre oricare două corpuri. În acest sens sînt cunoscute și utilizate rezultatele:

a) interacția gravitațională dintre o pătură sferică și un punct material

$$F(r) = \begin{cases} -\dfrac{\gamma m M_s}{r^2}, & r > R, \\ 0, & r < R, \end{cases} \tag{5.5}$$

unde R este raza sferei, iar M_s este masa stratului sferic;

b) interacția gravitațională dintre o sferă masivă și un punct material

$$F(r) = \begin{cases} -\dfrac{\gamma m M}{r^2}, & r > R, \\ \dfrac{4\pi\gamma}{3} m\rho r = -kr, & r < R, \end{cases} \tag{5.6}$$

unde M este masa sferei, ρ densitatea cu care este distribuită masa și m masa punctului material.

Se observă că atît sfera masivă cît și pătura sferică interacționează cu o masă punctuală externă ca și cînd masa lor ar fi concentrată în centrul sferei. De aici se trage concluzia că forța gravitațională de interacție dintre două sfere omogene de mase M_1 și M_2 este egală cu forța de interacție dintre două puncte materiale de mase M_1 și M_2, care s-ar afla în centrele sferelor respective.

Interacția gravitațională a două corpuri are loc prin intermediul cîmpului gravitațional, care este o manifestare a proprietăților deosebite ale spațiului și timpului. Cantitativ, intensitatea cîmpului gravitațional se definește prin raportul dintre forța $\vec{F}$ ce se exercită asupra unei particule de probă și masa ei:

$$\vec{\Gamma} = \frac{\vec{F}_{12}}{m} = -\frac{\gamma M}{r_{12}^2}\frac{\vec{r}_{12}}{r_{12}}, \tag{5.7}$$

unde M este masa corpului care a creat cîmpul.

Cîmpul gravitațional este un cîmp conservativ și atunci, energia potențială a unei particule de masă m în cîmpul gravitațional al particulei de masă M, care este în același timp și energia de interacție dintre cele două particule, se exprimă:

$$E_p = -\int_r^\infty \vec{F}\,d\vec{r} = -\frac{\gamma mM}{r}. \tag{5.8}$$

Potențialul cîmpului se exprimă:

$$V = \frac{E_p}{m} = -\frac{\gamma M}{r}. \tag{5.9}$$

Energia potențială a unui sistem de N particule care interacționează prin intermediul cîmpului gravitațional este egală cu suma energiilor potențiale ale tuturor perechilor de particule și se exprimă:

$$E_p = -\gamma \sum_{i>j}^{N} \sum_{j=1}^{N} \frac{m_i m_j}{r_{ij}}. \tag{5.10}$$

Energia de interacție a sistemului de particule, luată cu semn schimbat, este energia de legătură a sistemului, adică energia necesară îndepărtării particulelor constituente ale sistemului la infinit.

Pentru cazurile *a*) și *b*) de interacție gravitațională considerate mai sus, energia potențială se exprimă:

a)
$$E_p = \begin{cases} -\dfrac{\gamma mM_s}{r}, & r > R, \\ -\dfrac{\gamma mM_s}{R}, & r < R; \end{cases} \tag{5.11}$$

b)
$$E_p = \begin{cases} -\dfrac{\gamma mM}{r}, & r > R, \\ -\dfrac{3}{2}\dfrac{\gamma mM}{R} + \dfrac{1}{2}\dfrac{\gamma mM}{R^3} r^2, & r < R. \end{cases} \tag{5.12}$$

Originea de la care se măsoară energia potențială gravitațională terestră se alege în mod arbitrar și anume:

— cînd particula de masă m se află în apropiere de Pămînt astfel încît forțele de interacție sînt constante, se alege drept configurație de referință

pentru sistemul particulă-Pămînt aceea în care particula rămîne pe Pămînt, unde $E_p(R_p) = 0$;

— în general se alege configurația de referință aceea în care particula și Pămîntul sînt separate printr-o distanță infinită și se consideră $E_p(\infty) = 0$. În acest caz, originea energiei potențiale coincide cu originea forțelor.

Cîmpul forțelor gravitaționale fiind conservativ satisface relația:

$$\vec{F} = -\nabla E_p \tag{5.13}$$

care în cazul forțelor centrale, cum sînt cele gravitaționale, devine:

$$F = -\frac{dE_p}{dr}. \tag{5.14}$$

* * *

5.2.1. Fie o pătură sferică de rază r, masă M_s și grosimea $\delta \ll r$. Un punct material de masă m se găsește la distanța R de sferă. a) Să se calculeze forța gravitațională de interacție $F(R)$ dintre pătura sferică și masa m, precum și energia potențială $E_p(R)$; *b*) să se reprezinte grafic funcțiile $F(R)$ și $E_p(R)$.

5.2.2. Fie o sferă masivă omogenă de rază R și masă M. Un punct material de masă m se găsește la distanța r de sferă. a) Să se calculeze forța gravitațională de interacție $F(r)$ dintre sferă și punctul material, precum și energia potențială $E_p(r)$ corespunzătoare; *b*) să se reprezinte grafic funcțiile $F(r)$ și $E_p(r)$.

5.2.3. Forța gravitațională de interacție dintre un corp de masă $m = 25$ kg și un fir linear infinit cu densitatea liniară ρ separate prin distanța $R = 4$ m este $F = -6{,}67 \cdot 10^{-9}$ N. Să se calculeze densitatea firului.

5.2.4. Un fir linear de lungime $2l$ și densitate lineară ρ se consideră de-a lungul ordonatei y a unui sistem de coordonate plan. Originea sistemului de coordonate se alege la jumătatea firului. Un punct material de masă m se găsește pe abscisă astfel încît $l \ll x$. Să se determine: a) cum depinde forța gravitațională F de interacția dintre fir și punctul material, precum și cum depinde energia potențială E_p de abscisa x. Să se reprezinte grafic dependențele $F(x)$ și $E_p(x)$; *b*) să se exprime forța $F(x)$ și energia potențială $E_p(x)$ în aproximația lineară în $\frac{l}{x}$. Să se calculeze aceste mărimi aproximative cunoscînd următoarele date numerice: $l = 2$ m, $m = 20$ kg, $\rho = \frac{2\text{ kg}}{\text{m}}$ și $x = 20$ m.

5.2.5. Un punct material de masă $m = 0{,}2$ kg se află la distanța $d = 3$ m de jumătatea unui fir, pe axa lui. Știind că abscisa punctului material x_1 considerată față de o origine aleasă în extremitatea firului este de două ori mai mare decît lungimea l a firului și că forța gravitațională de interacție dintre fir și punctul material este $F = -6{,}67 \cdot 10^{-13}$ N, să se calculeze: *a*) energia potențială gravitațională corespunzătoare E_p; *b*) densitatea lineară ρ a firului.

5.2.6. Un punct material de masă $m = 2{,}7 \cdot 10^{-3}$ kg se află pe axa unui inel confecționat din sîrmă de cupru (densitatea cuprului $\rho_{Cu} = 8{,}6 \cdot 10^3$ kg/m^3)

cu secțiunea de rază $r = 2{,}5 \cdot 10^{-3}$ m la o distanță x de centrul inelului. Să se determine: a) dependența forței gravitaționale de interacția dintre inel și punctul material, de distanța x și să se reprezinte grafic această dependență; b) știind că la jumătatea distanței de pe axă ce corespunde valorii maxime a forței, aceasta are valoarea $F_1 = \pi^2 \cdot 10^{-14}$ N, să se calculeze raza R a inelului. Să se arate de cîte ori, valoarea forței la această distanță este mai mică decît valoarea maximă a forței; c) să se calculeze distanța față de centrul inelului la care forța își atinge valoarea maximă.

5.2.7. Un corp cu masa $m = 1$ kg cade de la suprafața Pămîntului printr-un tunel imaginar care trece prin centrul acestuia. Să se determine: a) legea de variație în timp a spațiului parcurs de corp și a vitezei sale; *b*) în cazul că mișcarea este oscilatorie armonică, să se calculeze perioada mișcării; *c*) viteza maximă a corpului. Să se arate că se obține aceeași valoare și folosind legea conservării energiei scrisă în centrul Pămîntului; *d*) accelerația maximă a corpului; *e*) energia totală a corpului în orice moment al mișcării. Se neglijează frecarea cu aerul și cu pereții tunelului.

5.2.8. Un corp cu masa $m = 1$ kg cade de la suprafața Pămîntului printr-un tunel imaginar care trece la o distanță d arbitrară de centrul Pămîntului. Să se determine: *a*) legea de variație în timp a spațiului parcurs de corp și a vitezei sale; *b*) dacă mișcarea este oscilatorie armonică, să se calculeze perioada mișcării; *c*) viteza maximă și accelerația maximă ale corpului; *d*) energia totală a corpului în orice moment al mișcării. Pentru punctele *c*) și *d*) se va considera $d = \frac{R_p}{\sqrt{2}}$. Se neglijează frecările cu aerul și cu pereții tunelului.

5.2.9. Să se demonstreze folosind argumente calitative că următoarele patru perioade sînt egale (84,3 minute); *a*) perioada de revoluție a unui satelit la suprafața Pămîntului; *b*) perioada de oscilație a unui corp ce se mișcă fără frecare printr-un tunel ce traversează Pămîntul; *c*) perioada unui pendul simplu avînd o lungime egală cu raza Pămîntului și care oscilează într-un cîmp gravitațional uniform ($g = 9{,}81$ m/s^2; *d*) perioada unui pendul cu lungimea infinită care oscilează în cîmpul gravitațional terestru real.

5.2.10. O cavitate sferică este practicată într-o sferă masivă de rază R astfel încît suprafața sa exterioară atinge suprafața sferei masive și trece prin centrul ei. Masa sferei înainte de a avea cavitatea era M. Să se exprime forța gravitațională de interacție dintre sfera cu cavitate și un punct material de masă m aflat la distanța $x (x \gg R)$ de centrul sferei masive pe direcția care unește centrul sferei cu centrul cavității.

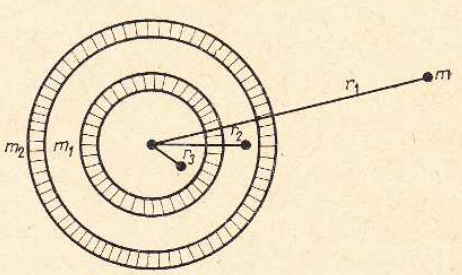


Fig. 5.2.11

5.2.11. Considerăm două straturi sferice concentrice cu densități uniforme și mase m_1 și m_2 ca în figura 5.2.11. La distanța r se află masa m. Să se calculeze forța gravitațională ce acționează asupra particulei de masă m și energia ei potențială în cazurile: *a*) cînd particula se găsește la $r = r_1$; *b*) cînd particula se găsește la $r = r_2$; *c*) cînd particula se găsește la $r = r_3$.

5.2.12. Considerăm o sferă omogenă în echilibru (nu există deplasări între părțile ei datorită interacției gravitaționale dintre ele) de rază R și densitate ρ. *a*) Să se exprime presiunea la distanța r de centrul sferei și să se reprezinte grafic funcția $p = p(r)$ pentru $0 \leqslant r \leqslant R$; *b*) să se calculeze valoarea maximă a presiunii în cazul Pământului, considerînd raza sa $R_p = 6{,}3 \cdot 10^6$ m și densitatea medie $\rho_p = 5{,}5 \cdot 10^3$ kg/m^3. Să se indice la ce distanță de centrul Pământului se obține această valoare; *c*) la ce distanță de centrul sferei, presiunea devine 0,75 din cea maximă.

5.2.13. Să se găsească valoarea energiei gravitaționale de interacție a unui sistem de opt stele, fiecare avînd masa egală cu masa Soarelui și fiind situată în unul din vîrfurile unui cub de latură $l = 3{,}084 \cdot 10^{16}$ m. Se neglijează energia proprie a fiecărei stele.

5.2.14. Fie o sferă masivă de masă M și rază R. *a*) Să se calculeze energia gravitațională proprie a sferei și să se aplice relația găsită în cazul Soarelui; *b*) utilizînd teorema virialului, să se evalueze temperatura Soarelui.

5.2.15. Două mase, $m_1 = 800$ kg și $m_2 = 600$ kg, sînt separate printr-o distanță $r = 0{,}25$ m. *a*) Să se calculeze intensitatea cîmpului gravitațional datorit acestor mase în punctul precizat prin $r_1 = 0{,}20$ m față de m_1 și $r_2 = 0{,}15$ m față de m_2; *b*) să se calculeze potențialul gravitațional datorit acelorași mase.

5.2.16. Două mase, $m_1 = 0{,}2$ kg și $m_2 = 0{,}8$ kg, se găsesc la o distanță $r = 0{,}12$ m. *a*) Să se calculeze intensitatea cîmpului gravitațional într-un punct situat pe direcția dintre mase la distanța $r_1 = 4 \cdot 10^{-2}$ m față de m_1; *b*) să se calculeze potențialul în acest punct; *c*) să se calculeze lucrul mecanic necesar pentru a deplasa unitatea de masă din locul în care se află masa m_2 în punctul considerat, de-a lungul direcției centrelor celor două corpuri.

5.3. Mișcarea corpurilor cerești

Mișcarea corpurilor cerești în general și în particular, mișcarea corpurilor în sistemul solar, se studiază pe baza legii atracției universale. De obicei, se consideră problema a două corpuri în interacție, neglijînd la început interacția cu celelalte corpuri, care apoi se consideră ca o perturbație.

Datorită faptului că forța gravitațională este o forță centrală, problema mișcării a două corpuri se reduce la problema mișcării plane a unui singur corp de masă redusă, care este descrisă de ecuația:

$$\mu \ddot{\vec{r}} = -\frac{\gamma m_1 m_2}{r^2} \vec{r}_0; \quad \mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}, \tag{5.15}$$

unde μ este masa redusă.

Mișcarea centrului de masă al sistemului de corpuri nu depinde de forțele de interacție, ci numai de eventuale forțe externe. Momentul cinetic $\vec{L}$ în cazul acestei probleme este o constantă, adică:

$$\vec{L} = \vec{r} \times \mu \dot{\vec{r}} = \mu r^2 \omega \vec{k} = \vec{\text{const}}, \tag{5.16}$$

unde $\vec{k}$ este versorul perpendicular pe planul traiectoriei. Acest rezultat este și o consecință a legii ariilor.

Pentru a descrie mișcarea într-un sistem de coordonate în rotație trebuie introdusă forța centrifugă de inerție și ecuația de mișcare devine:

$$\mu\ddot{r} = -\frac{\gamma m_1 m_2}{r^2} + \mu\omega^2 r. \tag{5.17}$$

Soluția acestei ecuații este de forma:

$$\frac{1}{r} = A\cos\varphi + \frac{\mu\gamma m_1 m_2}{|\vec{L}|^2}, \tag{5.18}$$

unde A este o constantă. Aceasta este ecuația unei secțiuni conice și deci, traiectoria poate fi o curbă deschisă (parabolă sau hiperbolă) sau o curbă închisă (elipsă sau cerc). Ecuația secțiunilor conice în coordonate polare este de forma:

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{S\varepsilon}(1 - \varepsilon\cos\varphi), \tag{5.19}$$

unde S definește dimensiunile figurii, iar ε este excentricitatea. Comparînd (5.18) cu (5.19) se obține:

$$\frac{1}{S\varepsilon} = \frac{\mu\gamma m_1 m_2}{|\vec{L}|^2}, \quad \frac{1}{S} = -A. \tag{5.20}$$

Cazurile particulare: $\varphi = \pi$ și $\varphi = 0 \Rightarrow$, respectiv, $\frac{1}{r_{min}} = \frac{1}{S\varepsilon}(1+\varepsilon)$, $\frac{1}{r_{max}} = \frac{1}{S\varepsilon}(1-\varepsilon)$, cu ajutorul cărora se poate scrie:

$$\frac{r_{max} - r_{min}}{r_{max} + r_{min}} = \varepsilon. \tag{5.21}$$

Energia totală în această mișcare este dată de relația:

$$E = E_c + E_p = \frac{|\vec{L}|^2}{2\mu}\left(\frac{1}{r_{min}}\right)^2 - \frac{\gamma m_1 m_2}{r_{min}} = \frac{|\vec{L}|^2}{2\mu}\left(\frac{1}{r_{max}}\right)^2 - \frac{\gamma m_1 m_2}{r_{max}}. \tag{5.22}$$

Combinînd (5.21) cu (5.22) și ținînd seama de (5.20) rezultă:

$$\varepsilon = \left(1 + \frac{2E|\vec{L}|^2}{\mu\gamma^2 m_1^2 m_2^2}\right)^{1/2}; \quad E = \frac{\mu\gamma^2 m_1^2 m_2^2}{2|\vec{L}|^2}(1 - \varepsilon^2). \tag{5.23}$$

Deci forma traiectoriei depinde de valoarea energiei particulei de masă redusă în cîmpul forței centrale după cum urmează:

$$\begin{aligned} E < 0 \Rightarrow &\begin{cases} \varepsilon = 0 & \text{cerc;} \\ 0 < \varepsilon < 1, & \text{elipsă;} \end{cases} \\ E = 0 \Rightarrow \varepsilon = 1, & \quad \text{parabolă;} \\ E > 0 \Rightarrow \varepsilon > 1, & \quad \text{hiperbolă.} \end{aligned} \tag{5.24}$$

Se pot obține aproape toate informațiile asupra mișcării planetelor considerînd cazul special al orbitelor circulare. Se neglijează forțele dintre planete considerînd în primă aproximație numai interacția Soare-planetă. Aceste considerații se aplică și în cazul sateliților naturali și artificiali ai planetelor.

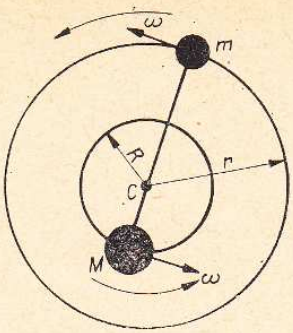


Fig. 5. I

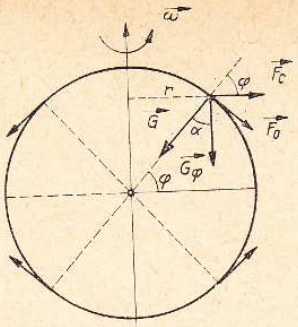


Fig. 5. II

Fie ca în figura 5.I, corpurile sferice de mase m și M, care se mișcă pe orbite circulare datorită interacției gravitaționale dintre ele. Centrul de masă C se află pe linia ce le unește și nu are accelerație în absența forțelor externe. Atunci mișcarea se poate studia într-un sistem de coordonate cu originea în C. Cum forțele gravitaționale acționează perechi acțiune-reacțiune avem:

$$M\omega^2 R = m\omega^2 r \Rightarrow MR = mr,$$

$$\frac{\gamma Mm}{(r+R)^2} = \mu\omega^2(r+R) \Rightarrow \omega = \left[\frac{\gamma(M+m)}{(r+R)^3}\right]^{1/2} \tag{5.25}$$

sau:

$$m\omega^2 r = \frac{\gamma rmM}{(r+R)^2} \Rightarrow \omega = \sqrt{\frac{\gamma rM}{r(r+R)^2}}$$

și relațiile sînt echivalente dacă ținem seama că față de C.M. sînt adevărate relațiile:

$$R = \frac{m}{M+m}(r+R)\ ;\ r = \frac{M}{M+m}(r+R).$$

Considerînd Pămîntul sferă omogenă și corpurile atrase de el ca puncte materiale, putem utiliza formulele (5.5) — (5.12). Intensitatea cîmpului gravitațional $\vec{\Gamma}$ se confundă cu accelerația gravitațională $\vec{g}$, care are diferite variații datorită anumitor factori.

a) *Variația cu altitudinea.* Fie un corp de masă m care interacționează gravitațional cu Pămîntul. Combinînd legea atracției universale cu legea a II-a a dinamicii se obține:

$$mg_h = \frac{\gamma mM}{(R_p+h)^2};\ g_h = \frac{\gamma M}{(R_p+h)^2}, \tag{5.26}$$

unde h este altitudinea la care se află corpul față de Pămînt. Notînd cu g accelerația gravitațională la suprafața Pămîntului, atunci accelerația gravitațională g_h la altitudinea h se exprimă:

$$g_h = g\frac{R_p^2}{(R_p+h)^2};\quad g = \frac{\gamma M}{R_p^2}. \tag{5.27}$$

b) *Variația cu latitudinea.* Această variație ca și turtirea Pămîntului la poli se datorește rotației Pămîntului în jurul axei sale. Din figura 5.II rezultă:

$$\vec{G}_\varphi = m\vec{g}_\varphi = \vec{G} + \vec{F}_c = m\vec{g} - m\omega^2 R_p \cos\varphi \cdot \vec{n}, \tag{5.28}$$

unde $\vec{F}_c$ este forța centrifugă datorită rotației Pământului, iar $\vec{n}$ este versorul ei. Componenta greutății $\vec{G}_\varphi$ după direcția razei pământești se exprimă:

$$G_\varphi = \frac{G - m\omega^2 R_p \cos^2 \varphi}{\cos \alpha} \approx G\left(1 - \frac{\omega^2 R_p}{g} \cos^2 \varphi\right); \quad \cos \alpha \approx 1,$$

de unde

$$g_\varphi = g\left(1 - \frac{\omega^2 R_p \cos^2 \varphi}{g}\right), \tag{5.29}$$

iar

$$\frac{\omega^2 R_p}{g} = \begin{cases} \dfrac{1}{289}, & \text{dacă Pământul este o sferă;} \\ \dfrac{1}{191}, & \text{dacă Pământul se consideră turtit.} \end{cases} \tag{5.30}$$

Abaterea direcției greutății (a firului cu plumb) față de raza Pământului este dată de relația:

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\omega^2 R_p \cos \varphi \sin \varphi}{g - \omega^2 R_p \cos^2 \varphi}. \tag{5.31}$$

c) *Variația lui $\vec{g}$ datorită deplasării corpului pe o paralelă de pe suprafața Pământului cu viteza $\vec{v}$.* În acest caz apare și forța Coriolis: $\vec{F}_{cor} = -2m\vec{\omega} + \vec{v}_{rel}$ și deci:

$$\vec{g}_e = \vec{g} - \omega^2 R_p \cos \varphi \vec{n} \pm 2\vec{\omega} \times \vec{v}_{rel}, \tag{5.32}$$

unde semnele plus și minus se referă, respectiv, la mișcarea spre vest și spre est.

* * *

5.3.1. Să se calculeze densitatea medie a Pământului cunoscînd următoarele date: constanta gravitațională $\gamma = 6{,}67 \cdot 10^{-11} \dfrac{N^2}{kg^2}$, raza medie a Pământului $R_p = 6{,}37 \cdot 10^6$ m și accelerația gravitațională la suprafața Pământului $g = 9{,}81$ m/s^2.

5.3.2. Știind că un corp este de șase ori mai greu pe Pământ decît pe Lună, că raza medie a Pământului este de 3,66 ori mai mare decît raza medie a Lunii și că densitatea medie a Pământului este $\rho_p = 5{,}5 \cdot 10^3 \dfrac{kg}{m^3}$, să se calculeze densitatea medie a Lunii și accelerația gravitațională de cădere pe aceasta.

5.3.3. Accelerația de cădere liberă a unui corp pe Soare este de 28 de ori mai mare decît accelerația gravitațională la suprafața Pământului. Cunoscînd raza medie a Soarelui, $R_s = 6{,}95 \cdot 10^8$ m, precum și raza medie a orbitei Pământului, $R_{ps} = 1{,}5 \cdot 10^{11}$ m, să se determine perioada de rotație a Pământului în jurul Soarelui.

5.3.4. Cunoscînd perioada de revoluție a Pămîntului în jurul Soarelui $T = 3{,}16 \cdot 10^7$ s și că raza medie a Pămîntului este de $4{,}25 \cdot 10^{-5}$ ori mai mică decît distanța dintre centrele Pămînt-Soare, $R_{ps} = 1{,}5 \cdot 10^{11}$ m, să se determine: *a*) accelerația Pămîntului pe orbita sa în jurul Soarelui; b) precizia relativă cu care trebuie să se determine accelerația unui corp de pe Pămînt pentru a pune în evidență influenta Soarelui.

5.3.5. Să se calculeze unghiul α în grade sub care se vede diametrul Soarelui din centrul Pămîntului cunoscînd datele: distanța Pămînt-Soare $R_{ps} = 8{,}3$ minute lumină, durata anului diurn $T = 3{,}16 \cdot 10^7$ s și $g_s = 28\ g_p$. Se consideră $\sin \alpha \approx \alpha$.

5.3.6. Planeta Venus efectuează o rotație completă în jurul Soarelui în 224,7 zile siderale. Considerînd raza medie a Soarelui $R_s = 6{,}95 \cdot 10^6$ m și că $g_s = 28\ g_p$, să se determine distanța R_{vs} dintre centrele Venus-Soare.

5.3.7. Luna efectuează mișcarea de rotație în jurul Pămîntului pe o orbită aproximativ circulară cu raza de 60 ori mai mare decît raza medie a Pămîntului ($R_p = 6{,}37 \cdot 10^6$ m). Cunoscînd accelerația gravitațională la suprafața Pămîntului $g = 9{,}81$ m/s^2, să se calculeze perioada de rotație a Lunii în jurul Pămîntului.

5.3.8. *a*) Să se explice dacă este posibilă plasarea unui satelit artificial al Pămîntului la o astfel de distanță încît să se rotească în jurul Pămîntului cu viteza unghiulară egală cu viteza de rotație a acestuia rămînd tot timpul deasupra unui punct de pe suprafața sa. *b*) Să se exprime raza orbitei acestui satelit în funcție de raza Pămîntului R_p, cunoscînd $T = 24$ h și $g = 9{,}81$ m/s^2. *c*) Poate fi planul orbitei unui astfel de satelit, planul ecuatorial?

5.3.9. Să se calculeze prima viteză cosmică v_I și a doua viteză cosmică v_{II} la suprafața Pămîntului.

5.3.10. Să se calculeze viteza v de mișcare a unui satelit artificial al Pămîntului pe o orbită circulară de rază $R = \frac{R_p}{81} 10^2$ km, știind că prima viteză cosmică $v_1 = 7{,}9 \frac{\text{km}}{\text{s}}$.

5.3.11. Pe baza unei analize simple a mișcării mecanice, explicați dacă inelul planetei Saturn prezintă o structură continuă sau este alcătuit dintr-un aglomerat de mici sateliți.

5.3.12. Distanța medie Marte-Soarte R_{ms} este de 1,53 ori mai mare decît distanța Pămînt—Soare $R_{ps} = 1{,}49 \cdot 10^8$ km. Masa și raza planetei Marte sînt respectiv, $M_m = 0{,}11\ M_p$ și $R_m = 0{,}532\ R_p$. Cunoscînd viteza a doua cosmică la suprafața Pămîntului $v_{II} = 11{,}2$ km/s, să se determine: *a*) perioada în ani pămîntești de rotație a planetei Marte pe orbita circulară în jurul Soarelui; *b*) densitatea medie a planetei Marte ρ_m în raport cu densitatea medie ρ_p a Pămîntului; *c*) accelerația gravitațională g_m la suprafața planetei Marte; *d*) viteza a doua cosmică la suprafața planetei Marte.

5.3.13. Trei corpuri identice de masă M sînt localizate în vîrfurile unui triunghi echilateral cu latura $l = 6{,}61 \cdot 10^{-7}\ R_p$($R_p$ raza Pămîntului). Datorită interacției gravitaționale reciproce, cele trei corpuri evoluează pe o orbită circulară circumscrisă triunghiului echilateral cu o perioadă de trei ori mai mică decît perioada unui satelit staționar al Pămîntului. Să se calculeze masa M.

5.3.14. Să se calculeze procentul cu care variază accelerația Pămîntului spre Soare în timpul eclipsei totale de Soare, la punctul unde se află Luna direct opusă Soarelui.

5.3.15. Patru corpuri numerotate 1, 2 ... 4 ce pot fi considerate puncte materiale, între care acționează forțe de atracție gravitațională, se rotesc în jurul unui centru O care rămîne tot timpul pe o dreaptă pe care sînt distribuite corpurile la distanțe constante unul față de celălalt. Distanța dintre corpurile 1 și 3 este R, iar corpurile 2 și 4 se află la aceeași distanță r față de corpul 3. Considerînd masele corpurilor 2 și 4 neglijabile în raport cu masele corpurilor 1 și 3, precum și $r \ll R$, să se calculeze: *a)* forțele suplimentare care trebuie să acționeze asupra corpurilor 2 și 4 astfel încît distanțele dintre toate corpurile să rămînă constante pentru $\frac{M_1}{M_3} = 3 \cdot 10^5$, $\frac{r}{R} = 10^{-2}$, forțele gravitaționale dintre corpul 3 și corpurile 2 și 4 fiind, respectiv: $F' = -10^2$ N, $F'' = +2 \cdot 10^2$ N; *b)* în cazul în care corpurile 1 și 3 sînt, respectiv, Soarele și Pămîntul, iar corpurile 2 și 4 reprezintă un corp de pe suprafața Pămîntului ziua și, respectiv, noaptea, să se calculeze procentul cu care scade greutatea corpului pe suprafața Pămîntului la miezul nopții și la miezul zilei față de dimineața și seara din cauza atracției Soarelui; *c)* în cazul în care corpurile 1 și 3 sînt, respectiv, Luna și Pămîntul iar corpurile 2 și 4 reprezintă puncte dintr-o mare de pe suprafața Pămîntului, să se calculeze procentul cu care scade greutatea apei în cele două puncte datorită atracției Lunii și să se explice originea fluxului.

5.3.16. Porind de la legea atracției universale, să se arate: *a)* cum depinde accelerația gravitațională g_r de distanța r de la centrul Pămîntului. Să se reprezinte grafic raportul $\frac{g_r}{g} = f(r)$; *b)* ce valori corespund pe abscisă valorii $\frac{1}{4}$ de pe ordonată, cu alte cuvinte, la ce distanță față de centrul Pămîntului, accelerația gravitațională devine $g/4$.

5.3.17. Două corpuri de mase egale m se așază pe platanele unei balanțe care se află la distanțele h_1 și h_2 față de suprafața Pămîntului astfel încît diferența celor două distanțe $h = \frac{3}{6{,}67} 10^2$ m. Găsind că variația greutăților celor două mase este de $4{,}4 \cdot 10^{-4}\%$, să se calculeze densitatea medie a Pămîntului (se consideră $g = 10$ m/s^2).

5.3.18. Un corp de masă arbitrară se găsește pe suprafața Pămîntului într-un loc a cărui latitudine $\varphi = \frac{\pi}{3}$. Să se calculeze: *a)* procentul de variație a greutății corpului datorită rotației Pămîntului în jurul Soarelui; *b)* tangenta unghiului de deviere a firului cu plumb în locul considerat.

5.3.19. Un corp de masă m suspendat de o balanță dinamometrică se află într-o navă ce se deplasează de-a lungul ecuatorului cu viteza v. Cînd nava se deplasează spre vest, balanța indică o greutate cu $1{,}458 \cdot 10^{-2}\%$ mai mare decît atunci cînd nava se găsește în repaus. Diferența dintre indicațiile balanței cînd nava se deplasează spre vest și spre est este $\Delta G = 71{,}2962 \cdot 10^{-3}$

kg. Să se determine masa m a corpului și viteza v cu care se deplasează nava. Se dau: accelerația gravitațională la ecuator $g_0 = 9{,}78$ m/s^2 și viteza unghiulară de rotație a Pământului în jurul axei sale $\omega = 7{,}29 \cdot 10^{-5} \frac{\text{rad}}{\text{s}}$.

5.3.20. Fie două planete de mase $m_1 = 1{,}2 \cdot 10^{26}$ kg și $m_2 = m_1/5$ aflate la distanța $r_0 = 6{,}67 \cdot 10^7$ m una față de alta. Problema mișcării lor relative datorită interacției gravitaționale poate fi rezolvată reducînd-o la problema mișcării unei particule de masă redusă μ sub influența unui centru de forțe invers proporționale cu pătratul distanței, situat în originea O a unui sistem de coordonate. Se obține o familie de traiectorii care trec prin punctul P, unde viteza este perpendiculară pe segmentul PO. Traiectoriile se disting după valorile vitezei v_p în punctul P. În general poate fi scrisă relația: $v_p = \beta v_0$, unde v_0 este viteza pe orbita circulară cu centrul în O și care trece prin P, iar β un parametru ce caracterizează orbitele familiei. Să se determine: *a)* energia totală E_0 și viteza v_0 corespunzătoare orbitei circulare; *b)* momentul cinetic $|\vec{L}_0|$ pentru traiectoria circulară; *c)* valorile parametrului β pentru orbite închise și deschise; *d)* valorile momentului cinetic $|\vec{L}|$ în punctul P pentru orbite închise și deschise; *e)* să se calculeze energia totală E, momentul cinetic $|\vec{L}|$ și excentricitatea ε pentru traiectoria cu $\beta = 2\sqrt{2}$.

5.3.21. De pe o platformă aflată la un pol al Pământului se lansează două obiecte cu aceeași viteză inițială v_0. Direcția vitezei inițiale a primului obiect coincide cu direcția razei pământești, iar direcția vitezei inițiale a celui de-al doilea este perpendiculară pe prima și obiectul se mișcă după o traiectorie eliptică. Cunoscînd raportul distanțelor maxime față de centrul Pământului ale celor două obiecte, $\frac{R_1}{R_2} = 2$, să se determine viteza inițială v_0. Se dau: raza Pământului $R_p = 6{,}4 \cdot 10^6$ m și $g = 10$ m/s^2.

5.3.22. De pe o platformă aflată la ecuator se lansează doi sateliți pe orbite eliptice cu aceeași viteză inițială orizontală relativă la Pământ, $v_0 = 5{,}832$ km/s, dar în direcții opuse. Să se calculeze raportuldistanțelor maxime de la centrul Pământului ale celor doi sateliți. Se dau: raza Pământului $R_p = 6{,}4 \cdot 10^6$ m, $g = 10$ m/s^2 și $\omega = 7{,}29 \cdot 10^{-5} \frac{\text{rad}}{\text{s}}$.

5.3.23. Un proiectil este aruncat pe verticală față de suprafața Pământului cu o viteză inițială egală cu prima viteză cosmică și explodează după ce atinge înălțimea maximă. Să se determine locul unde explodează. La ce înălțime maximă ar ajunge proiectilul dacă viteza inițială ar fi egală cu a doua viteză cosmică. Se neglijează frecarea cu aerul.

5.3.24. Cîtă energie trebuie comunicată unui satelit cu $m = 10^4$ kg pentru a fi plasat la suprafața Pământului? Dar în cazul cînd satelitul trebuie plasat pe o orbită la o înălțime față de suprafața Pământului egală cu o treime din raza sa? Se dau: raza Pământului $R_p = 6{,}4 \cdot 10^6$ m și $g = 10$ m/s^2.

5.3.25. Fie doi sateliți artificiali ai Pământului, care au aceeași masă $m = 10^3$ kg și se mișcă pe aceeași orbită circulară la înălțimea $h = R_p$ față de suprafața Pământului, dar în sensuri opuse. Să se calculeze: *a)* energia totală a sistemului constituit din Pământ și cei doi sateliți înainte de a se

ciocni; *b)* considerînd ciocnirea plastică, să se găsească energia mecanică totală imediat după ciocnire; *c)* energia transformată în căldură după ciocnire; *d)* să se descrie mișcarea pe care o au sateliții după ciocnire.

5.3.26. Un satelit artificial al Pămîntului de masă $m = 600$ kg se deplasează inițial pe o orbită circulară la o depărtare $h = 2R_p$ față de suprafața Pămîntului. Datorită unor cauze necunoscute, satelitul își micșorează energia în medie cu $\Delta E = 7{,}9 \cdot 10^5$ J într-o rotație completă și parcurge treptat diverse orbite a căror rază scade lent pînă ce satelitul ajunge la depărtarea $h_1 = R_p$ față de suprafața Pămîntului. Să se determine: *a)* viteza v și perioada T, precum și viteza v_1 și perioada T_1 corespunzătoare orbitei inițiale și, respectiv, finale; *b)* numărul de orbite parcurse pînă în starea finală; *c)* forța medie datorită căreia satelitul trece de pe orbita inițială pe orbita finală; *d)* să se arate dacă se conservă sau nu momentul cinetic în procesul de trecere a satelitului de pe o orbită pe alta.

5.3.27. O pereche de stele se rotesc în jurul centrului lor comun de masă. Una dintre stele are masa $m = 3 \cdot 10^{30}$ kg, iar cealaltă are masa de două ori mai mare. Distanța dintre stele este $d = 6{,}67 \cdot 10^{11}$ m. Să se determine: *a)* perioada de rotație a stelelor în jurul centrului de masă; *b)* raportul momentelor cinetice și energiilor cinetice pentru cele două stele.

5.4. Principiul echivalenței

Fie două sisteme de referință: unul inerțial S, în care există un cîmp gravitațional omogen $\vec{\Gamma}$ unde o particulă capătă accelerația $\vec{g} = \vec{\Gamma}$ independentă de masa particulei și altul, S', neinerțial, care este accelerat uniform cu accelerația $\vec{a}$ față de sistemul inerțial în care nu există cîmp gravitațional și în care particula izolată se comportă analog, adică are accelerația $-\vec{a}$ independentă de masa sa.

Comportarea identică din punctul de vedere fizic a corpurilor în cîmp gravitațional și într-un sistem de referință neinerțial reprezintă *principiul echivalenței* dintre forțele de gravitație și forțele de inerție. Acest principiu stă la baza teoriei generale a relativității create de A. Einstein.

* * *

5.4.1. Să presupunem că locuitorii unei cabine spațiale ce se deplasează spre Lună simt la un moment dat prezența cîmpului gravitațional. Explicați cînd este posibil acest lucru.

5.4.2. Fie o navă cosmică în care se găsesc oameni și aparate și care se mișcă în spațiul interplanetar în prezența cîmpului gravitațional. Să se arate ce va indica o balanță dinamometrică aflată în nava în mișcare, de care este suspendată o masă m, în cazurile: *a)* cădere liberă a navei; *b)* asupra navei se aplică o forță $F > G$ și de același sens; *c)* asupra navei se aplică o forță F în sens contrar lui G; *d)* cum poate fi măsurată masa unui corp din cabina în mișcare?

5.4.3. Un proiectil în cabina căruia s-a montat o balanță dinamometrică de care s-a suspendat masa m se deplasează în spațiul interplanetar în prezența cîmpului gravitațional. Ce va indica balanța dacă proiectilul intrînd în atmosfera unei planete capătă în afară de accelerația gravitațională o accelerație $\vec{a}$ datorită frecării cu atmosfera?

Capitolul 6

MECANICA FLUIDELOR

Presiunea hidrostatică dintre două suprafețe de nivel h, $h + \mathrm{d}h$ este determinată de greutatea exercitată pe unitatea de suprafață a stratului de fluid:

$$\mathrm{d}p = \rho g \, \mathrm{d}h.$$

La lichide, densitatea este practic constantă cu înălțimea, astfel încît relația precedentă se scrie sub formă integrală:

$$p = \rho g h.$$

Legea lui Pascal arată că un lichid incompresibil transmite integral și în toate direcțiile presiunea exercitată asupra lui

$$p = \text{const.}$$

Legea lui Pascal, care se deduce din principiul conservării energiei, se aplică în special la presa hidraulică pentru care

$$F_2 = F_1 \frac{S_2}{S_1}.$$

Legea lui Arhimede arată că un corp scufundat într-un fluid este împins de jos în sus cu o forță egală cu greutatea volumului de fluid dezlocuit:

$$F_A = \rho_{fl} \cdot V g.$$

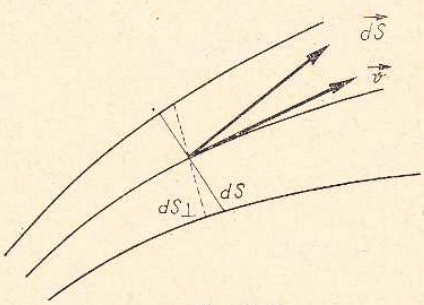


Fig. 6. I

Ecuația de continuitate descrie curgerea unui fluid printr-o conductă:

$$\operatorname{div} \rho \vec{v} = 0.$$

În cazul regimului *staționar* de curgere a unui fluid printr-un tub subțire, unde densitatea și viteza sînt constante într-o secțiune dată, se pot scrie relațiile:

$$D_m = \rho_1 v_1 S_1 = \rho_2 v_2 S_2 = \ldots = \text{const.}$$

În cazul unui fluid *incompresibil*, $\rho_1 = \rho_2$ și rezultă debitul volumic sub forma:

$$D_V = v_1 S_1 = v_2 S_2 = \ldots = \text{const.}$$

Legea lui Bernoulli pentru fluide incompresibile se scrie sub forma:

$$p_1 + \frac{1}{2} \rho v_1^2 + \rho g z_1 = p_2 + \frac{1}{2} \rho v_2^2 + \rho g z_2 = \text{const.}$$

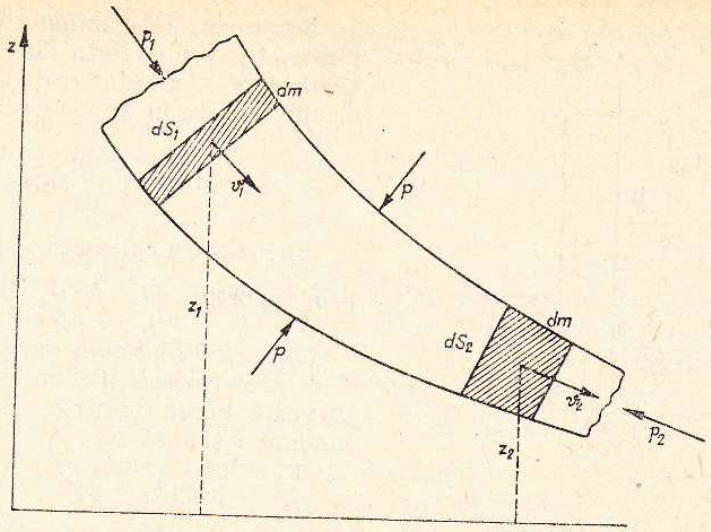


Fig. 6. II

Pentru conducte *orizontale*, $z_1 = z_2$ și legea lui Bernoulli se scrie:

$$p + \frac{1}{2}\rho v^2 = \text{const.}$$

Cu ajutorul legii lui Bernoulli se calculează viteza cu care iese un lichid printr-un orificiu lateral al unui vas:

$$v = \frac{\sqrt{2gh}}{\sqrt{1 - \left(\frac{s}{S}\right)^2}}.$$

În cazul particular $s \ll S$ se obține *formula lui Torricelli:*

$$v = \sqrt{2gh}.$$

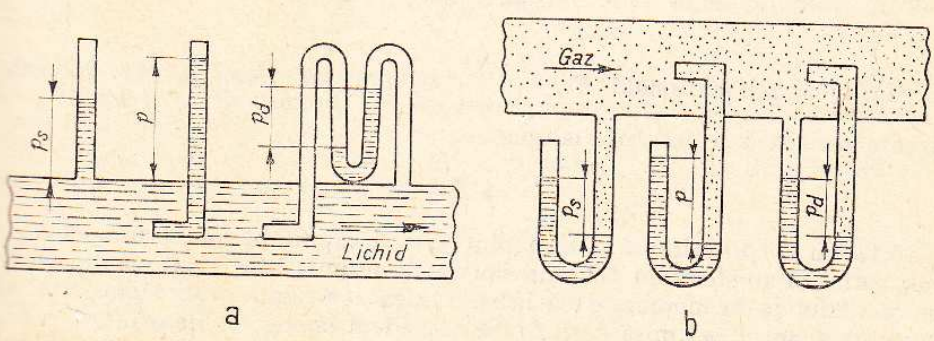


Fig. 6. III

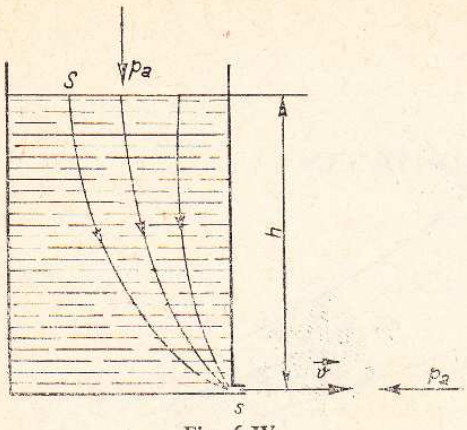


Fig. 6.IV

Legea curgerii laminare (legea lui Newton) exprimă forța de frecare internă care apare între două straturi de fluid aflate în mișcare relativă:

$$dF = \eta \frac{dv}{dz} dS.$$

Viscozitatea cinematică se definește prin raportul: $\nu = \frac{\eta}{\rho}$.

Legea lui Poiseuille exprimă viteza și debitul volumic ale unui fluid *vîscos* care curge printr-o conductă de lungime l și rază R:

$$v(r) = \frac{p_1 - p_2}{4\eta l}(R^2 - r^2), \quad D_V = \frac{\pi R^4 (p_1 - p_2)}{8\eta l}.$$

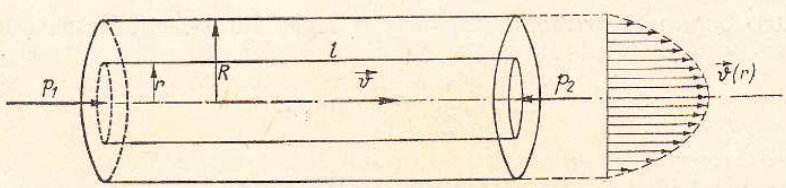


Fig. 6. V

Legea lui Stokes arată că forța de frecare întîmpinată de un corp la deplasarea lui printr-un fluid este proporțională cu viscozitatea fluidului η, cu dimensiunea caracteristică a corpului l și cu viteza sa v:

$$F = K\eta l v.$$

Pentru sferă, $K = 6\pi$, $l = r$ și $F = 6\pi\eta r v$.

Forța de rezistență în regim *turbulent* este proporțională cu aria secțiunii frontale S, cu densitatea ρ a fluidului și cu pătratul vitezei:

$$F = CS\frac{\rho v^2}{2}.$$

Mărimea adimensională $Re = \frac{\rho v D}{\eta}$ se numește *numărul lui Reynolds* și caracterizează regimul de curgere.

* * *

6.1. Un corp de formă cubică plutește pe suprafața mercurului dintr-un vas, astfel că un sfert din volumul său este scufundat. Ce fracțiune din volum se va scufunda în mercur, dacă la suprafața acestuia se toarnă un strat de apă care acoperă la limită corpul? Se consideră cunoscute densitatea mercurului ρ_{Hg} și densitatea apei ρ_a.

6.2. Într-un vas în care se află mercur și apă este introdusă o sferă de fier. Să se afle fracțiunea x din volumul sferei, care intră în mercur. Densitățile ρ_{Hg}, ρ_a și ρ_{Fe} se consideră cunoscute.

6.3. Un corp de formă conică cu raza bazei $R = 10$ cm și densitatea $\rho = 800$ kg/m^3 plutește pe suprafața apei de densitate $\rho_a = 1\,000$ kg/m^3, în poziție verticală cu vîrful în sus. Să se afle raza r a cercului de intersecție a conului cu planul suprafeței apei.

6.4. O tijă subțire are un capăt fixat într-o articulație de peretele unui vas, celălalt capăt fiind cufundat în lichidul din vas de densitate ρ_0. Tija se poate roti fără frecare în articulație. Să se afle densitatea ρ a tijei, dacă la echilibru, lungimea rămasă afară reprezintă o fracțiune $k < 1$ din lungimea totală. Se neglijează forțele capilare.

6.5. Un corp trebuie comprimat cu o forță $F_2 = 1$ MN folosind o presă hidraulică la care raportul suprafețelor pistoanelor este $\frac{S_2}{S_1} = 10$. Știind că puterea consumată este $P_1 = 3$ kW cu un randament $\eta = 80\,\%$ și că pistonul mic coboară cu $l_0 = 20$ cm la o apăsare, să se calculeze frecvența ν_1 a apăsărilor acestui piston.

6.6. Diametrele pistoanelor unei prese hidraulice sînt în raportul $\frac{d_2}{d_1} = 10$, iar pistonul mic este acționat de o pîrghie la care unul din brațe este de 10 ori mai mare decît celălalt. La capătul brațului mare al pîrghiei acționează o forță $F = 400$ N. Știind că randamentul presei este $\eta = 80\,\%$, să se calculeze lucrul mecanic consumat pentru ridicarea pistonului mare cu $l_2 = 1$ m.

6.7. Să se afle forța de presiune rezultantă F exercitată de un lichid de densitate ρ asupra peretelui lateral pătrat al unui cub de latură l. La ce înălțime h_0 de la bază se află punctul de aplicație al forței rezultante?

6.8. Un vas cilindric de rază interioară R și înălțime h este plin cu un lichid de densitate ρ. Să se afle forța de apăsare pe suprafața laterală a vasului.

6.9. Un vas cilindric conține un anumit volum de lichid. La baza vasului există un mic orificiu de scurgere. Să se afle raportul între timpul t_1 de scurgere a primei jumătăți și timpul t_2 al celei de-a doua jumătăți ale lichidului.

6.10. Un vas cilindric cu înălțimea $h = 0{,}7$ m și cu aria bazei $S = 6 \cdot 10^{-2}$ m^2 este plin cu apă. Pe fundul vasului se află un orificiu cu aria $s = 10^{-4}$ m^2. Se întreabă: *a)* care este viteza v de coborîre a nivelului apei? *b)* Cît timp t_1 este necesar pentru golirea vasului pe jumătate? *c)* Cît timp t este necesar pentru golirea completă a vasului?

6.11. Un vas cilindric de înălțime h_0 și secțiune S este plin cu un lichid. La baza vasului se află un orificiu de secțiune s. Să se afle timpul t_1 în care se scurge prin orificiu întreaga cantitate de lichid și să se compare cu timpul t_2 de scurgere a aceleiași cantități de lichid, dacă nivelul este menținut la înălțimea h_0.

6.12. Într-un vas adînc și larg curge apă printr-un tub cu debitul volumic $D = 150 \frac{cm^3}{s}$. La baza vasului este practicat un mic orificiu de secțiune $s = 0{,}5\ cm^2$. Ce nivel maxim h poate atinge apa din vas?

6.13. Un vas cilindric are practicat un orificiu de secțiune mică s_1 la jumătatea înălțimii și alt orificiu de secțiune $s_2 = \frac{s_1}{\sqrt{2}}$ la bază. În vas curge pe la partea superioară printr-o conductă un lichid cu o viteză egală cu cea de ieșire prin orificiul inferior. Care trebuie să fie secțiunea conductei pentru ca nivelul lichidului să fie staționar?

6.14. Un lichid omogen se află într-un vas cilindric larg care are practicate pe aceeași generatoare două orificii, unul la adîncimea h_1 față de nivelul lichidului presupus staționar, iar celălalt la adîncimea h_2. Să se afle coordonatele punctului de intersecție a celor două jeturi de lichid, care ies prin orificii.

6.15. Dintr-un vas larg cu apă al cărui nivel este menținut constant la înălțimea h, curge apă prin două orificii dispuse pe aceeași generatoare la distanța a unul de altul. La ce adîncime față de suprafața apei se află orificiul superior, dacă cele două jeturi cad în același punct din planul orizontal care cuprinde baza vasului?

6.16. Să se afle debitul volumic D_V al unui fluid, știind diferența de nivel Δh și secțiunile S_1, S_2 pentru dispozitivul din figura 6.16.

6.17. În dispozitivul din figura 6.17, prin conducta AB de secțiuni $S_A = 2\ cm^2$ și $S_B = 0{,}5\ cm^2$ circulă aer de densitate $\rho_{aer} = 1{,}32 \frac{kg}{m^3}$, cu debitul volumic $D_V = 150 \frac{l}{min}$. În tubul ab se află apă. Să se afle diferența de nivel Δh a apei din cele două ramuri ale tubului.

6.18. O seringă are lungimea cilindrului $l = 4$ cm, secțiunea $S = 1{,}2\ cm^2$ și secțiunea orificiului $s = 1\ mm^2$. Dacă seringa se umple cu apă și se acționează asupra pistonului cu forța constantă $F = 5$ N, în cît timp se va goli complet? Se neglijează viscozitatea apei.

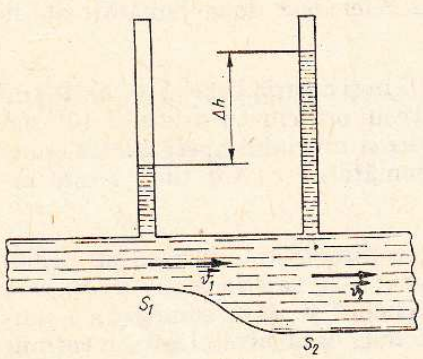


Fig. 6.16

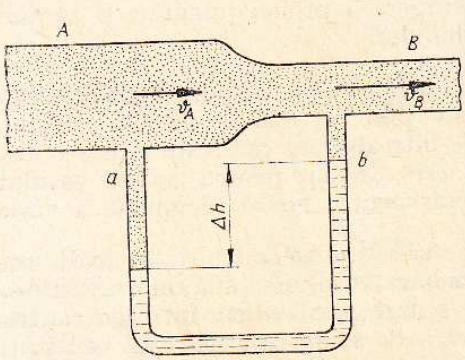


Fig. 6.17

6.19. Dintr-o pompă iese vertical un jet de apă cu debitul volumic $D_V = 60 \frac{1}{\text{min}}$ și secțiunea transversală $S_0 = 1{,}5$ cm^2. Să se afle secțiunea S_1 a jetului la înălțimea $h = 2$ m.

6.20. Prin conducta orizontală AB din figură curge un lichid astfel încît nivelele sale în cele două tuburi verticale sînt h_1, respectiv h_2. Să se afle viteza de curgere a lichidului.

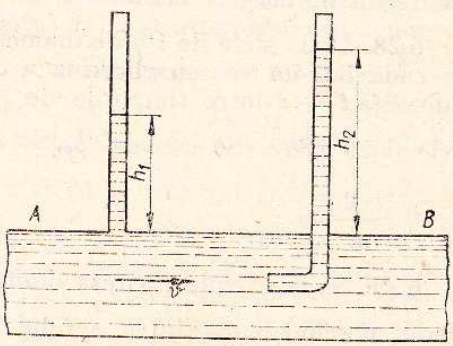


Fig. 6.20

6.21. O sferă mică de lemn de densitate ρ_1 cade liber într-un vas cu apă de densitate ρ_2, suficient de adînc, de la înălțimea h_1 față de nivelul apei. Să se afle timpul total după care bila ajunge din nou la înălțimea maximă. Se neglijează frecările cu aerul și apa.

6.22. Un vas cilindric de rază R conținînd lichid de densitate ρ se rotește uniform cu viteza unghiulară ω în jurul axei sale verticale. Să se afle ecuația suprafeței libere a lichidului și distribuția presiunii pe fundul vasului.

În repaus, înălțimea coloanei de lichid este h_0.

6.23. Într-un vas închis conținînd aer în condiții normale este suspendat la capătul unui resort un corp de masă $m = 5$ kg și densitate $\rho = 2\,000 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$. Menținînd temperatura constantă se introduce aer în vas pînă la o presiune la care corpul se urcă cu $\Delta l = 5$ mm. Să se calculeze această presiune cunoscînd că alungirea resortului sub sarcina $F_1 = 1$ kgf este $x_1 = 1$ cm. Densitatea aerului în condiții normale este $\rho_0 = 1{,}3 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$.

6.24. Un cilindru în care se află apă pînă la nivelul $h = 20$ cm este suspendat de un resort și efectuează oscilații armonice cu perioada $T = 2$ s și amplitudinea $A = 20$ cm. În centrul bazei cilindrului se află un mic orificiu prin care apa curge afară. Să se afle viteza maximă și minimă cu care apa iese prin orificiu la începutul experienței.

6.25. Un tub cilindric vertical cu secțiunea S, deschis la ambele capete, este cufundat cu un capăt într-un vas mare cu mercur de densitate ρ. În tub se mișcă un piston cu masa m, care inițial se află la nivelul mercurului din vas. Să se afle lucrul mecanic consumat pentru a ridica pistonul la înălțimea $h_0 < H$ (H fiind înălțimea corespunzătoare presiunii atmosferice).

6.26. Printr-o conductă de diametru $D = 2$ cm curge CO_2 cu viteza constantă $v_2 = 0{,}12 \frac{\text{m}}{\text{s}}$. Cunoscînd viscozitatea cinematică a gazului, $\nu = 1{,}33 \times 10^{-6} \frac{\text{m}^2}{\text{s}}$, să se precizeze regimul de curgere și să se calculeze viteza critică. Numărul lui Reynolds corespunzător vitezei critice este 2 400.

6.27. Printr-o conductă circulă apă cu debitul masic $D_m = 0{,}2 \frac{kg}{s}$. Cunoscînd viscozitatea dinamică în condițiile experienței, $\eta = 1{,}1 \cdot 10^{-3} \frac{kg}{m \cdot s}$ și numărul lui Reynolds corespunzător vitezei critice, $Re = 2\,400$, să se afle valoarea maximă a diametrului conductei pentru care se mai păstrează un regim de curgere laminar.

6.28. Două sfere de Pb de diametre $d = 3$ mm și $d' = 1$ mm sînt lăsate să cadă într-un vas cu glicerină a cărui adîncime este $h = 1$ m. Să se afle diferența $t' - t$ între timpurile de parcurgere uniformă a vasului de către cele două sfere. Se cunosc: $\rho_{Pb} = 11\,300 \frac{kg}{m^3}$, $\rho_{gl} = 1\,260 \frac{kg}{m^3}$ și $\eta = 14{,}7 \times 10^{-3} \frac{kg}{m \cdot s}$.

6.29. Să se calculeze viteza limită de cădere a unei picături de apă prin aer cunoscînd viscozitatea aerului, $\eta = 1{,}7 \cdot 10^{-5} \frac{kg}{m \cdot s}$, diametrul picăturii $d = 1$ mm, densitatea aerului $\rho = 1{,}3 \frac{kg}{m^3}$, coeficientul de rezistență în regim turbulent $K = 0{,}24$, densitatea apei $\rho_a = 1\,000 \frac{kg}{m^3}$. Se va calcula viteza pentru curgerea în regim laminar și în regim turbulent.

6.30. Pe suprafața laterală a unui vas cilindric de rază $R = 20$ cm este montat un tub orizontal de lungime $l = 5$ cm și de rază interioară $r = 5$ mm. În vas se află ulei cu viscozitatea dinamică $\eta = 1{,}2 \cdot 10^{-3} \frac{kg}{m \cdot s}$. Să se afle dependența dintre viteza v de coborîre a nivelului lichidului din vas și înălțimea sa h măsurată de la nivelul tubului. Să se afle valoarea vitezei pentru $h = 26$ cm. Densitatea uleiului este $\rho = 900 \frac{kg}{m^3}$.

6.31. Pe o suprafață orizontală se află un vas cilindric cu lichid de densitate $\rho = 900 \frac{kg}{m^3}$ și viscozitate $\eta = 1{,}5 \cdot 10^{-3} \frac{kg}{m \cdot s}$. Nivelul lichidului este menținut constant la înălțimea $h = 55$ cm. Pe suprafața laterală este montat un tub orizontal de lungime $l = 10$ cm și raza interioară $r = 1$ mm, la înălțimea $h_1 = 5$ cm de la bază. Să se afle distanța pe orizontală d, măsurată de la capătul capilarului pînă la punctul în care lichidul cade pe plan.

6.32. O sferă de sticlă cu densitatea $\rho = 2\,700 \frac{kg}{m^3}$ cade într-un vas adînc cu glicerină atingînd viteza limită $c = 5 \frac{cm}{s}$. Cunoscînd densitatea glicerinei $\rho_0 = 1\,200 \frac{kg}{m^3}$ și viscozitatea $\eta_0 = 1{,}393 \cdot 10^{-2} \frac{kg}{m \cdot s}$, să se afle raza r a sferei.

6.33. De la un rezervor (castel) de apă trebuie umplut un vas larg cu volumul $V = 2$ m^3, aflat la distanța $l = 500$ m de rezervor, printr-un tub de diametru interior $d = 3$ cm. Cunoscînd viscozitatea apei $\eta = 1{,}05 \times 10^{-3} \frac{\text{kg}}{\text{m} \cdot \text{s}}$ și înălțimea nivelului apei din rezervor față de orizontala tubului $h = 20$ m, să se afle timpul necesar de umplere a vasului.

6.34. La baza unui vas cilindric de rază $R = 10$ cm, în care se află ulei de ricin, este fixat un tub capilar orizontal de rază interioară $r = 1$ mm și lungime $l = 3$ cm. Viscozitatea dinamică a uleiului este $\eta = 1{,}2 \cdot 10^{-3} \frac{\text{kg}}{\text{m} \cdot \text{s}}$, iar densitatea $\rho = 900 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$. Să se exprime înălțimea h a nivelului lichidului din vas în funcție de viteza sa v și să se afle valoarea numerică a înălțimii pentru $v = 0{,}4$ cm/s.

6.35. O sferă căzînd liber în aer atinge viteza limită c, forța de rezistență fiind proporțională cu pătratul vitezei. Se atașează sferei o tijă subțire, de masă neglijabilă. Capătul liber al tijei se fixează într-un punct în jurul căruia se poate roti împreună cu sfera. Sistemul tijă-sferă este expus unui curent de aer cu direcția orizontală și deviază de la verticală cu unghiul α. Să se calculeze viteza curentului de aer.

6.36. Un corp cade în aer fără viteză inițială și întîmpină din partea aerului o forță de rezistență proporțională cu pătratul vitezei. Cunoscînd viteza limită de cădere liberă c, să se exprime viteza și spațiul în funcție de timp, precum și expresia spațiului în funcție de viteză. Se neglijează forța arhimedică.

6.37. Un corp este aruncat vertical în sus în aer cu viteza inițială v_0 și întîmpină din partea aerului o forță de rezistență proporțională cu pătratul vitezei. Cunoscînd viteza limită de cădere liberă c, să se afle timpul de urcare t_u, înălțimea maximă h_m la care se ridică corpul, timpul de coborîre t_c și viteza v_m cu care corpul revine pe pămînt.

6.38. O particulă cade liber în aer fără viteza inițială și întîmpină din partea aerului o forță de rezistență proporțională cu viteza. Să se calculeze timpul după care particula atinge 99% din viteza sa limită de cădere, care este $c = 4{,}9 \frac{\text{m}}{\text{s}}$. Se neglijează forța arhimedică.

6.39. Un corp punctiform cade liber în aer și întîmpină din partea acestuia o forță de rezistență proporțională cu viteza. Cunoscînd viteza limită de cădere liberă c, să se calculeze viteza și spațiul în funcție de timp.

6.40. Să se afle timpul necesar unei sfere de rază r să atingă viteza limită cînd cade într-un lichid cu viscozitate dinamică η. Sfera pleacă din repaus de la suprafața lichidului. Se consideră că viteza limită este practic atinsă cînd valoarea ei diferă de cea exactă cu 1%. Se va considera regimul laminar de cădere. Densitatea sferei este ρ.

6.41. O particulă se mișcă rectiliniu printr-un lichid vîscos sub acțiunea unei forțe de tracțiune constante F. Forța de rezistență este proporțională cu viteza (Stokes). Să se exprime viteza particulei în funcție de timp.

6.42. Un vas cilindric vertical plin cu apă are două mici orificii laterale pe aceeași generatoare, distanțate cu d. Cele două jeturi de apă care ies din vas se intersectează într-un punct. Să se afle locul geometric pe care-l descrie acest punct odată cu scurgerea apei. Orificiile au aceeași secțiune.

6.43. În problema precedentă 6.42, să se exprime viteza de deplasare a punctului de intersecție în funcție de înălțimea momentană a apei h.

6.44. La mijlocul înălțimii unui vas plin cu apă așezat pe un plan orizontal se află un orificiu mic. Apa, al cărei nivel este menținut staționar, iese prin orificiu și cade pe plan la distanța d_1 față de punctul în care generatoarea orificiului întîlnește planul. La ce distanță d_2 față de același punct va cădea apa dacă vasul se înclină înspre orificiu cu unghiul α?

6.45. Un vas cubic închis cu latura l este plin cu un lichid de densitate ρ și se deplasează orizontal cu accelerația a. Să se afle forța totală de apăsare asupra feței posterioare a vasului în timpul mișcării, precum și poziția punctului ei de aplicație.

6.46. Într-un tub vertical în formă de U se află o coloană de lichid cu lungimea totală l. Printr-un procedeu oarecare se dezechilibrează lichidul din tub. Să se afle perioada micilor oscilații ale lichidului. Se neglijează frecările și forțele superficiale.

6.47. Un vehicul aerian zburînd cu viteză constantă antrenează prin frecare aerul pe o distanță $d = 4{,}5$ cm de la suprafață. Cunoscînd tensiunea tangențială de frînare $f = 4 \cdot 10^{-2}$ N/m^2 și viscozitatea aerului $\eta = 1{,}8 \cdot 10^{-5}$ kg/m · s, să se calculeze viteza vehiculului.

6.48. Între doi cilindri coaxiali verticali de diametre $d_1 = 10$ cm și $d_2 = 10{,}4$ cm se află aer. Cilindrul exterior se rotește cu frecvența $\nu = 360$ rot/min, iar asupra celui interior, pentru a fi menținut fix, se acționează cu forța tangențială $F = 1{,}38 \cdot 10^{-3}$ N. Să se afle viscozitatea aerului. Înălțimea cilindrilor este aceeași, $h = 2{,}5$ cm.

6.49. Un disc orizontal de diametru $d = 20$ cm este suspendat de un fir elastic cu momentul director $f = 10^{-5}$ N · m/rad. Sub acest disc, la distanța $h = 1$ cm se rotește în plan orizontal un disc identic cu viteza unghiulară $\omega = 50$ rad/s. Cunoscînd viscozitatea aerului la temperatura experienței $\eta = 1{,}8 \cdot 10^{-5} \frac{\text{kg}}{\text{m} \cdot \text{s}}$, să se calculeze unghiul α cu care se va roti discul superior.

6.50 Într-o experiență cu viscozimetrul capilar Ostwald se măsoară timpul t_0 de scurgere a unui volum dat dintr-un lichid de referință și timpul t_1 de scurgere a aceluiași volum dintr-un alt lichid. Cunoscînd pentru lichidul de referință viscozitatea η_0 și densitatea ρ_0, precum și densitatea ρ_1 a lichidului de studiat, să se calculeze viscozitatea acestuia, η_1.

6.51. Raza cilindrului exterior (în rotație) al unui viscozimetru rotațional Couette este R, a celui interior (suspendat de un fir de torsiune) r, iar înălțimea acestuia h. Cunoscînd unghiul de răsucire a firului φ, momentul său director f și viteza unghiulară a cilindrului exterior ω, să se afle viscozitatea lichidului aflat în cilindrul exterior.

f = Constanta de torsiune a firului!

Capitolul 7

OSCILAȚII ȘI UNDE

7.1. Mișcarea oscilatorie armonică

Ecuația mișcării oscilatorii armonice este de forma:

$$x = A \sin(\omega t + \alpha) = A \sin(2\pi \nu t + \alpha) = A \sin\left(\frac{2\pi}{T} t + \alpha\right), \tag{7.1}$$

unde x este elongația la momentul t, A — amplitudinea oscilațiilor, T — perioada, $\omega = \frac{2\pi}{T}$ — pulsația, ν — frecvența oscilațiilor, α — faza inițială.

Viteza de oscilație și accelerația punctului material ce oscilează sînt:

$$v = \frac{dx}{dt} = A\omega \cos(\omega t + \alpha), \tag{7.2}$$

$$a = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2} = -A\omega^2 \sin(\omega t + \alpha). \tag{7.3}$$

Forța sub acțiunea căreia corpul de masă m oscilează este:

$$F = ma = -mA\omega^2 \sin(\omega t + \alpha) = -m\omega^2 x = -\frac{4\pi^2}{T^2} mx = -kx, \tag{7.4}$$

unde

$$k = \frac{4\pi^2 m}{T^2} \quad \text{sau} \quad T = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}}. \tag{7.5}$$

Coeficientul k, numit *constantă elastică*, este o mărime numeric egală cu forța care produce o deplasare x egală cu unitatea.

Energia totală a punctului material care oscilează este

$$E = \frac{1}{2} mA^2\omega^2, \tag{7.6}$$

energia cinetică este

$$E_c = \frac{1}{2} mv^2 = \frac{1}{2} mA^2\omega^2 \cos^2(\omega t + \alpha) \tag{7.7}$$

iar energia potențială este

$$E_p = \frac{1}{2} kx^2 = \frac{1}{2} m\omega^2 A^2 \sin^2(\omega t + \alpha). \tag{7.8}$$

Perioada micilor oscilații ale unui pendul matematic este:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}} \tag{7.9}$$

unde l este lungimea pendulului, iar g — accelerația gravitațională.

* * *

7.1.1. Cunoscînd vitezele $v_1 = 3$ cm/s și $v_2 = 5$ cm/s corespunzătoare elongațiilor $x_1 = 6$ cm și $x_2 = 4$ cm, să se determine: *a)* amplitudinea și perioada oscilației armonice; *b)* accelerația maximă.

7.1.2. Un punct material de masă $m = 2 \cdot 10^{-2}$ kg execută o mișcare oscilatorie armonică, descrisă de ecuația: $x = 0{,}05 \sin\left(\frac{\pi}{6}t + \frac{\pi}{3}\right)$ m. *a)* După cît timp accelerația devine $a = \frac{\sqrt{3}}{2} a_{max}$? *b)* Să se construiască graficul dependenței de timp a forței F ce acționează asupra punctului material și să se afle F_{max}. *c)* Să se construiască graficul dependenței de timp a energiilor cinetică și potențială. *d)* Să se determine după cît timp raportul energiilor cinetică și potențială este egal cu 1 și ce valoare are acest raport pentru $x = \frac{A}{2}$.

7.1.3. *a)* Să se scrie ecuația mișcării oscilatorii armonice a cărei amplitudine este de $A = 4$ cm, dacă într-un minut se efectuează 120 de oscilații complete, iar faza inițială este de $\Phi_0 = 30°$. *b)* După cît timp elongația este $\frac{\sqrt{2}}{2} A$ și ce viteză are corpul în acest moment?

7.1.4. Pe un drum cu adînciturile la distanțe egale $l = 40$ cm este împins un cărucior de masă $m = 9$ kg, prevăzut cu două resorturi identice. Știind că la o viteză de $v = 0{,}6$ m/s, căruciorul balansează puternic (este îndeplinită condiția de rezonanță), să se determine constanta elastică a resorturilor.

7.1.5. Un cilindru omogen, de înălțime $h = 16$ cm este parțial cufundat într-o baie care conține o soluție de apă cu sare, de densitate $\rho_a = 1{,}2$ g/cm^3. Fiind apăsat ușor și apoi lăsat liber, cilindrul execută oscilații armonice pe verticală, cu perioada $T = 0{,}7$ s. Să se afle densitatea ρ_c a materialului din care este confecționat cilindrul.

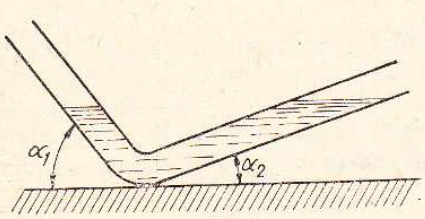


Fig. 7.1.6

7.1.6. Un lichid umple un tub încovoiat, ale cărui brațe fac cu orizontala unghiurile α_1 și α_2 (fig. 7.1.6). Lungimea coloanei de lichid este l. Să se determine perioada micilor oscilații, dacă lichidul este scos din poziția de echilibru (se neglijează forțele capilare și viscozitatea).

7.1.7. Un pendul de lungime l este plasat într-un ascensor ce pornește din repaus cu accelerația a timp de t_1 secunde, după care își continuă mișcarea uniformă și spre a se opri frînează tot cu a. Știind că în total ascensorul a

parcurs h metri, să se calculeze numărul de mici oscilații efectuate de pendul în decursul mișcării ascensorului. Numeric: $l = 0{,}2$ m; $a = \frac{g}{10}$; $t_1 = 8$s; $h = 200$ m.

7.1.8. Se plasează într-un ascensor un pendul matematic și un pendul elastic. Ascensorul se deplasează cu accelerație constantă a pe verticală. Cum se modifică perioadele mișcărilor oscilatorii ale celor două pendule?

7.1.9. De capetele unui resort cu coeficient de elasticitate k se fixează două sfere cu masele m_1 și m_2 și se comprimă resortul. Considerînd sistemul plasat într-o rachetă în stare de imponderabilitate, să se determine perioada de oscilație a resortului. Numeric: $m_1 = 1$ kg; $m_2 = 2$ kg; $k = 5$ N/m.

7.1.10. Un pendul matematic este construit dintr-o masă punctuală suspendată de o tijă metalică de masă neglijabilă. Acest pendul înaintează cu 7 secunde în 24 ore, la temperatura de 0° C și rămîne în urmă cu 9 secunde în 24 ore, la temperatura de 20°C. Să se determine coeficientul de dilatație a metalului tijei.

7.1.11. Un ceas bate secunda la suprafața Pămîntului. Cu cît va rămîne în urmă într-o zi, dacă: *a)* este ridicat la o altitudine de 200 m; *b)* este coborît într-o mină adîncă de 200 m. Raza Pămîntului: $R = 6\,370$ km.

7.1.12. Două sfere mici de masă m sînt plasate la capetele unei tije suspendate, fără greutate, de lungime l, între două sfere mari de masă M; distanța dintre centrele unei sfere mici și unei sfere mari este r, pe direcția tijei (fig. 7.1.12). Să se determine perioada micilor oscilații ale acestui pendul de torsiune. Numeric: $m = 1$ g; $M = 20$ kg; $l = 1$ m; $r = 16$ cm; constanta universală de atracție $K = 6{,}67 \cdot 10^{-11}$ N · m²/kg².

7.1.13. De un resort cu coeficient de elasticitate k este legat un fir, iar de fir un corp de masă m. La ce distanță se poate trage în jos corpul, pentru ca firul să rămînă întins în timpul oscilațiilor?

7.1.14. Pe o scîndură orizontală se află o masă m. Scîndura efectuează oscilații armonice în plan vertical cu perioada T și amplitudinea A. Să se determine apăsarea masei asupra scîndurii. Cu ce amplitudine trebuie să oscileze scîndura pentru ca masa să se desprindă de scîndură?

7.1.15. Un corp de masă m_2 este așezat peste un corp de masă m_1 legat de un resort al cărui coeficient de elasticitate este k. Se imprimă sistemului viteza inițială v_0. Să se calculeze: coeficientul de frecare minim dintre m_1 și m_2 pentru ca în timpul oscilațiilor, corpul m_2 să nu cadă de pe corpul m_1, dacă între corpul m_1 și suprafața orizontală nu există frecare, și amplitudinea oscilațiilor ansamblului. Numeric: $m_1 = 3$ kg; $m_2 = 1$ kg; $k = 40$ N/m; $v_0 = 2$ m/s.

7.1.16. Să se determine perioada oscilațiilor unui corp de masă m atașat de un resort de masă m_1 (fig. 7.1.16).

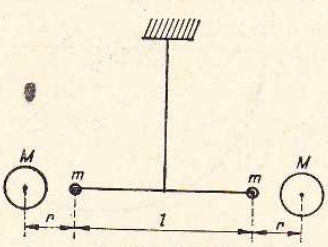


Fig. 7.1.12

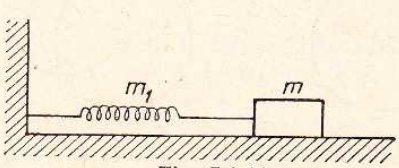


Fig. 7.1.16

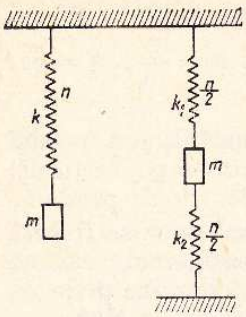


Fig. 7.1.18

7.1.17. Să se calculeze constanta elastică echivalentă a mai multor resorturi de constante elastice $k_1, k_2 \ldots k_n$ legate: *a)* în serie; *b)* în paralel.

7.1.18. Să se determine perioada de oscilație a sistemelor din figura 7.1.18, considerînd constanta de elasticitate invers proporțională cu numărul de spire ale resortului.

7.1.19. Să se determine perioada micilor oscilații ale unui pendul simplu, dacă masa tijei nu poate fi neglijată (fig. 7.1.19). Numeric: $m = 2$ kg; $m_1 = 0{,}6$ kg; $l = 1$ m.

7.1.20. O bară subțire omogenă oscilează în jurul unui ax ce trece printr-un capăt al ei și este perpendicular pe ea. Există un loc pe bară în care fixînd un corp de dimensiuni mici și de masă considerabilă, perioada oscilațiilor nu se schimbă?

7.1.21. O placă omogenă de forma unui triunghi echilateral poate să se rotească în jurul unei axe orizontale ce coincide cu una din laturi. Să se determine perioada micilor oscilații în funcție de înălțimea triunghiului.

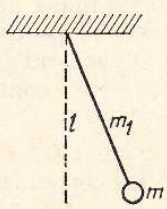


Fig. 7.1.19

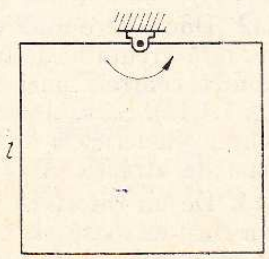


Fig. 7.1.22

7.1.22. O placă omogenă, pătrată, de latură l este atîrnată de mijlocul unei laturi (fig. 7.1.22). Să se determine perioada micilor oscilații. Cît devine raportul perioadelor, dacă placa este înlocuită cu un cadru pătrat, cu aceeași dimensiune a laturii?

7.1.23. Un inel omogen din sîrmă subțire efectuează oscilații mici în jurul unui ax orizontal. În primul caz, axul se află în planul inelului (fig. 7.1.23, *a*), iar în al doilea caz este perpendicular pe planul inelului (fig. 7.1.23, *b*). Să se determine raportul perioadelor micilor oscilații în cele două cazuri. Cît devine raportul perioadelor, dacă inelul este înlocuit cu un disc omogen de aceeași rază?

7.1.24. Un disc omogen semicircular de rază $r = 10$ cm se poate roti liber în jurul centrului său (fig. 7.1.24). Să se determine perioada micilor oscilații.

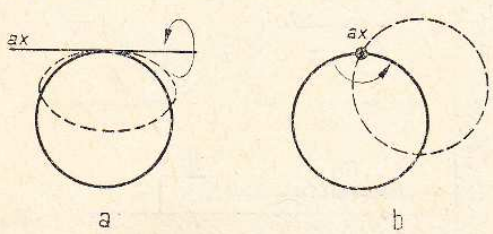


Fig. 7.1.23

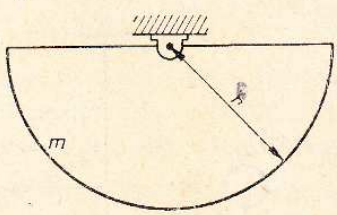


Fig. 7.1.24

7.1.25. O tijă de lungime l și masă neglijabilă, de-a lungul căreia poate culisa o masă sferică, omogenă, de rază r și masă m, este suspendată la ambele capete de două fire verticale identice, de lungime L. Să se afle perioada micilor oscilații ce se produc la o rotire a barei în jurul axei verticale ce trece prin centrul sferei.

7.1.26. O placă omogenă avînd forma unui triunghi echilateral este suspendată de vîrfuri cu trei fire de aceeași lungime $L = 1$ m. În poziția de echilibru, placa este orizontală, iar firele verticale. Să se afle perioada micilor oscilații de torsiune a plăcii în jurul unei axe verticale.

7.1.27. O coardă orizontală de lungime $L = 30$ cm și masă neglijabilă este supusă unei tensiuni $Q = 8$ N. Să se determine perioada micilor oscilații verticale ale unei mase punctuale $m = 50$ g, fixată la distanța $a = 10$ cm de unul din capetele coardei.

7.1.28. Să se determine perioada micilor oscilații ale cilindrului omogen din figura 7.1.28, dacă acesta se rostogolește fără alunecare. Numeric: $m = 2$ kg; $k = 18$ N/m.

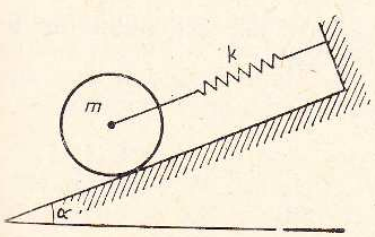


Fig. 7.1.28

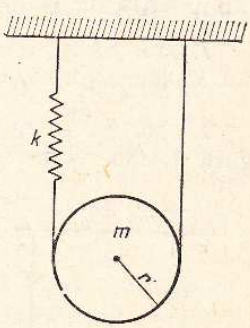


Fig. 7.1.29

7.1.29. Un cilindru omogen de masă m și rază r este suspendat de un resort și de un fir inextensibil (fig. 7.1.29). Să se determine perioada micilor oscilații. Numeric: $m = 1{,}5$ kg; $k = 20$ N/m.

7.1.30. Un cilindru omogen, prins cu două resorturi identice ca în figura 7.1.30 se poate rostogoli fără alunecare pe o suprafață orizontală. Să se determine perioada micilor oscilații. Numeric: $m = 1$ kg; $r = 25$ cm; $a = 10$ cm; $k = 10$ N/m.

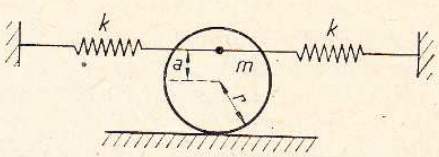


Fig. 7.1.30

7.1.31. Să se determine perioada micilor oscilații ale sistemului din figura 7.1.31. Numeric: $m = 2$ kg; $k = 15$ N/m.

7.1.32. Să se determine perioada micilor oscilații ale sistemului din figura 7.1.32, dacă $m = 1$ kg; $M = 2$ kg; $r = 10$ cm; $R = 20$ cm; $k = 20$ N/m.

7.1.33. Să se determine perioada micilor oscilații ale unei bare omogene, rigide, de lungime L și masă m, ce poate oscila în planul vertical datorită a două resorturi A și B liniare, identice, iar unul C, spiral (fig. 7.1.33).

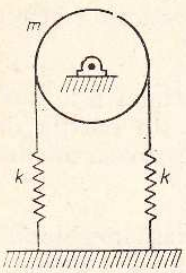


Fig. 7.1.31

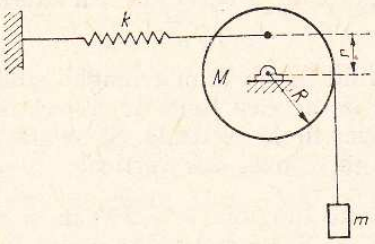


Fig. 7.1.32

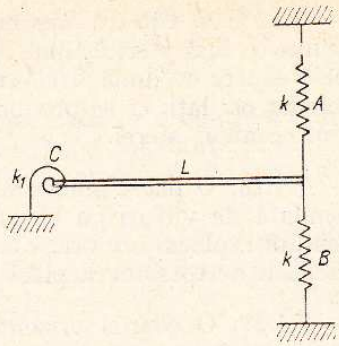


Fig. 7.1.33

7.1.34. Peste doi scripeți A și B de masă neglijabilă este trecut un fir inextensibil, de capătul căruia este suspendată o masă $m = 0{,}1$ kg (fig. 7.1.34). Scripeții fiind în legătură cu două resorturi cu $k_1 = 10$ N/m și $k_2 = 15$ N/m, să se determine perioada micilor oscilații ale masei m, atunci cînd este scoasă din poziția de echilibru și apoi lăsată liber.

7.1.35. Să se determine perioada micilor oscilații ale sistemului din figura 7.1.35 (se neglijează greutatea barei). Numeric: $m = 0{,}1$ kg; $k = 20$ N/m.

7.1.36. Să se determine perioada micilor oscilații ale sistemului din figura 7.1.36. Numeric: $m = 1$ kg; $k_1 = k_2 = 10$ N/m.

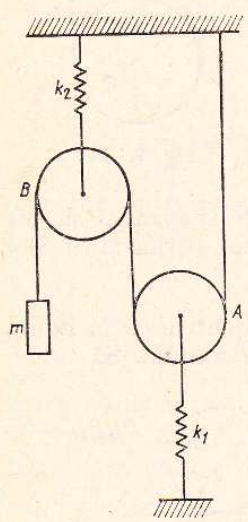


Fig. 7.1.34

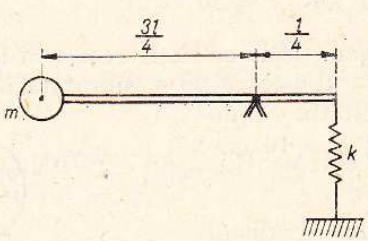


Fig. 7.1.35

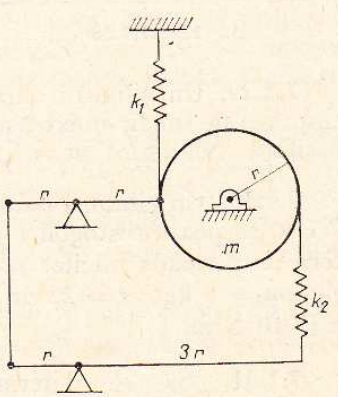


Fig. 7.1.36

7.1.37. Un cilindru omogen de rază $r = 10$ cm se poate rostogoli fără alunecare pe fața concavă a unei suprafețe cilindrice circulare de rază $R = 1$ m (fig. 7.1.37). Să se determine perioada micilor oscilații ale cilindrului cînd acesta este ușor deplasat din poziția de echilibru și apoi lăsat liber. Cum variază perioada dacă înlocuim cilindrul cu o sferă omogenă de rază $r = 10$ cm?

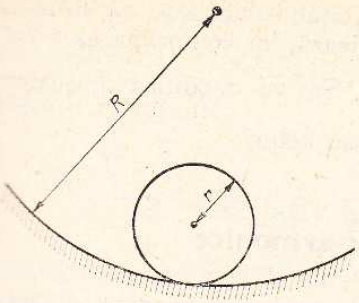


Fig. 7.1.37

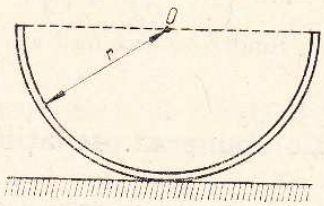


Fig. 7.1.38

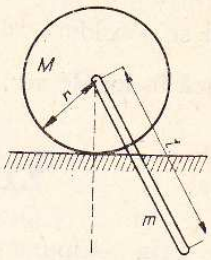


Fig. 7.1.39

7.1.38. Să se determine perioada micilor oscilații ale unui corp de forma unui înveliș semicilindric, ce se balansează fără alunecare pe o suprafață orizontală (fig. 7.1.38). Se dă $r = 10$ cm.

7.1.39. O bară omogenă de masă m și lungime l este prinsă rigid cu un capăt de centrul unui cilindru omogen de masă M și raza r (fig. 7.1.39). Să se determine perioada micilor oscilații dacă cilindrul se rostogolește fără alunecare pe o suprafață orizontală.

7.1.40. Să se determine perioada micilor oscilații ale unui pendul matematic de lungime l, atîrnat de un suport fixat de un cărucior dacă: *a)* căruciorul se mișcă orizontal cu accelerația a; *b)* căruciorul se mișcă cu accelerația a de-a lungul unui plan înclinat cu unghiul α; *c)* căruciorul se mișcă cu viteza constantă v pe un arc de cerc de rază R, într-un plan orizontal.

7.1.41. Pe un cărucior este fixată o bară orizontală de-a lungul căreia poate aluneca fără frecare un manșon de masă $m = 1$ kg legat cu două resorturi cu $k = 5$ N/m (fig. 7.1.41). Să se afle legea de mișcare a corpului în raport cu sistemul de referință legat de cărucior dacă: *a)* căruciorul primește o accelerație ce crește încet de la 0 la valoarea $a = 1$ m/s²; *b)* căruciorul primește brusc accelerația $a = 1$ m/s² care rămîne apoi neschimbată.

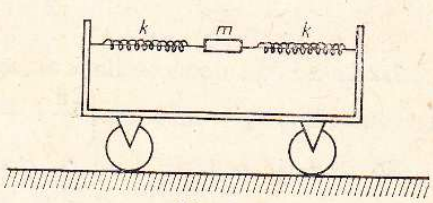


Fig. 7.1.41

7.1.42. Pe un platan atîrnat de un resort cade fără viteză inițială un corp de la înălțimea $h = 1$ m deasupra platanului. Neglijînd masa platanului în raport cu cea a corpului și considerînd că după ciocnire, corpul rămîne pe platan, să se determine ecuația de mișcare a platanului. La echilibru, același corp alungește resortul cu $x_0 = 3$ cm.

7.1.43. Un bloc de masă $m = 1$ kg, legat de o parte și de alta cu cîte un resort orizontal cu coeficient de elasticitate $k = 5$ N/m, este deplasat cu $x_0 = 30$ cm din poziția în care resorturile sînt neîntinse. Să se determine mișcarea blocului după ce a fost lăsat liber, știind că între bloc și suprafața de sprijin orizontală, coeficientul de frecare este $\mu = 0{,}1$.

7.1.44. Un cilindru vertical cu secțiunea $S = 80$ cm² este închis cu un piston de masă $m = 1$ kg. Volumul cilindrului sub piston este $V_0 = 5$ l. În momentul inițial, presiunea p_0 a aerului din cilindru este egală cu presiunea

atmosferică normală. *a)* Care este mișcarea pistonului dacă i se dă drumul brusc. Frecarea dintre piston și cilindru se neglijează, iar comprimarea aerului se consideră adiabatică $\left(\gamma = \frac{C_p}{C_v} = 1{,}4\right)$. *b)* Se va modifica mișcarea dacă în loc de aer, în cilindru se află hidrogen sau heliu?

7.2. Compunerea oscilațiilor armonice

Prin compunerea a două oscilații armonice de aceeași perioadă și de aceeași direcție se obține tot o oscilație armonică de aceeași perioadă, cu amplitudinea:

$$A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2 \cos(\alpha_1 - \alpha_2)} \tag{7.10}$$

și faza inițială:

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{A_1 \sin \alpha_1 + A_2 \sin \alpha_2}{A_1 \cos \alpha_1 + A_2 \cos \alpha_2} \tag{7.11}$$

unde A_1 și A_2 sînt amplitudinile oscilațiilor componente, iar α_1 și α_2 fazele lor inițiale.

Prin compunerea a două oscilații armonice perpendiculare, de aceeași perioadă

$$x = A \sin(\omega t + \alpha) \text{ și } y = B \sin(\omega t + \beta)$$

se obține o mișcare a cărei traiectorie este dată de ecuația:

$$\frac{x^2}{A^2} + \frac{y^2}{B^2} - \frac{2xy}{AB} \cos(\beta - \alpha) = \sin^2(\beta - \alpha). \tag{7.12}$$

* * *

7.2.1. Se dau două oscilații armonice de aceeași direcție, descrise, respectiv, de ecuațiile: $x_1 = 0{,}01 \sin\left(\frac{2\pi}{3} t + \frac{\pi}{6}\right)$ m și $x_2 = 0{,}05 \sin\left(\frac{2\pi}{3} t + \frac{\pi}{3}\right)$ m.

Să se scrie ecuația mișcării rezultate prin compunerea acestor oscilații.

7.2.2. Să se descompună în oscilații armonice simple următoarea ecuație:

$$x = A(\sin 2\pi\nu_1 t + \sin 2\pi\nu_2 t) \cdot \cos 2\pi\nu_3 t,$$

unde

$$A = 2 \text{ cm}; \ \nu_1 = 3 \text{ Hz}; \ \nu_2 = 2 \text{ Hz}; \ \nu_3 = 1 \text{ Hz}.$$

7.2.3. Să se determine ecuația mișcării rezultante a unui punct material ce participă simultan la două oscilații perpendiculare: *a)* $x = 3 \sin\left(\frac{\pi}{6} t + \frac{\pi}{2}\right)$; $y = 2 \sin \frac{\pi}{6} t$; *b)* $x = 6 \sin\left(2\pi t + \frac{3\pi}{2}\right)$; $y = 6 \sin 2\pi t$; *c)* $x = 3 \sin\left(\pi t + \frac{\pi}{6}\right)$; $y = 4 \sin\left(\pi t + \frac{\pi}{6}\right)$.

7.2.4. Un punct material participă simultan la două mișcări oscilatorii perpendiculare: $x = \sin\left(\frac{\pi}{2}t + \frac{\pi}{2}\right)$ și $y = 2\cos\frac{\pi}{4}t$. Să se afle traiectoria mișcării rezultante.

7.3. Oscilații amortizate și oscilații forțate

Ecuația unei mișcări sinusoidale amortizate este de forma:

$$x = A_0 e^{-\delta t} \sin(\omega t + \alpha) \tag{7.13}$$

unde ω este pseudopulsația sau pulsația oscilațiilor libere amortizate:

$$\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \delta^2} = \sqrt{\frac{k}{m} - \delta^2}. \tag{7.14}$$

Amplitudinea mișcării amortizate este $A(t) = A_0 e^{-\delta t}$, unde δ este coeficientul de amortizare.

Decrementul logaritmic al amortizării (Δ) se definește ca fiind logaritmul natural al raportului elongațiilor, sau amplitudinilor, la un interval de timp egal cu perioada T:

$$\Delta = \ln\frac{x(t)}{x(t+T)} = \ln\frac{A(t)}{A(t+T)} = \delta \cdot T. \tag{7.15}$$

Dacă asupra punctului material care execută o mișcare oscilatorie amortizată, dată de ecuația (7.13), acționează o forță,

$$F = F_0 \sin \Omega t, \tag{7.16}$$

după trecerea unui regim tranzitoriu se stabilește un regim permanent, în care punctul material efectuează oscilații de amplitudine B constantă și cu frecvența forței periodice exterioare, numite *oscilații forțate*. Ecuația oscilațiilor forțate este

$$x = B \sin(\Omega t + \beta) \tag{7.17}$$

unde amplitudinea B și faza inițială β sînt date de relațiile:

$$B = \frac{F_0}{m\sqrt{(\omega_0^2 - \Omega^2)^2 + 4\Omega^2\delta^2}} \tag{7.18}$$

și

$$\operatorname{tg}\beta = -\frac{2\delta\Omega}{\omega_0^2 - \Omega^2}. \tag{7.19}$$

* * *

7.3.1. O masă $m = 150$ g, suspendată la capătul unui resort de constantă elastică $k = 50$ N/m, efectuează oscilații verticale amortizate. Știind că după $n = 15$ oscilații, amplitudinea oscilațiilor scade de 2,71 ori, să se afle: *a)* decrementul logaritmic al amortizării; *b)* perioada oscilațiilor amortizate și coeficientul de amortizare.

7.3.2. Un resort de care este suspendată o greutate se alungește sub acțiunea acesteia cu $x_0 = 19{,}6$ cm. Sistemul greutate-resort este făcut să oscileze. Să se calculeze decrementul logaritmic al amortizării, știind că coeficientul de amortizare este $\delta = 0{,}3\ s^{-1}$.

7.3.3. Un pendul matematic oscilează amortizat, decrementul logaritmic al amortizării fiind egal cu $\Delta = 0{,}04$. Știind că după 50 s, energia pendulului a scăzut de $n = 7{,}39$ ori, să se afle lungimea pendulului.

7.3.4. De cîte ori se micșorează într-o perioadă viteza și accelerația unui corp ce execută o mișcare oscilatorie amortizată? Se dă decrementul logaritmic al amortizării $\Delta = 0{,}15$.

7.3.5. Pentru a menține în echilibru o ușă batantă, deschisă, este necesar să se aplice la mîner o forță de 50 N (ușa este prinsă cu resorturi ce o readuc în poziția închisă, de echilibru). Se poate deschide ușa aplicînd mînerului o forță de 0,1 N? (Se neglijează forțele de frecare.)

7.3.6. O masă este atîrnată de un resort și are perioada proprie de oscilație 2 s. Asupra masei acționează pe verticală o forță sinusoidală de amplitudine $F = 0{,}1$ N și o forță de frecare proporțională cu viteza de mișcare. Știind că la rezonanța vitezelor, amplitudinea oscilațiilor este $A_0 = 5$ cm, să se determine coeficientul r de proporționalitate a forței de frecare.

7.3.7. Un sistem efectuează oscilații forțate sub acțiunea unei forțe exterioare ce depinde sinusoidal de timp. Să se arate că la rezonanța vitezelor, lucrul mecanic al forței exterioare este maxim în unitatea de timp.

7.3.8. Un corp de masă $m = 250$ g execută o mișcare oscilatorie amortizată cu factorul de amortizare $\delta = 0{,}785\ s^{-1}$, perioada oscilațiilor neamortizate este $T_0 = \frac{2}{\sqrt{3}}$ s. Oscilațiile corpului devin forțate ca urmare a acțiunii unei forțe exterioare periodice $F = 0{,}1 \sin 2\pi t$ (N). Să se scrie ecuația oscilațiilor forțate.

7.4. Sisteme oscilante cu două grade de libertate

Sistemele care necesită două coordonate independente pentru determinarea poziției se numesc *sisteme cu două grade de libertate*. Fiecare masă a sistemului are o ecuație de mișcare, astfel că sistemul are două frecvențe naturale ν_1 și ν_2, determinate prin rezolvarea ecuației frecvențelor.

Cînd cele două mase ale sistemului oscilează astfel încît își ating simultan pozițiile de maxim și de echilibru, oscilația se numește *mod normal* sau *mod principal de vibrație*. În acest caz se alege o soluție particulară de forma:

$$x_1 = A \sin(\omega t + \varphi),\quad x_2 = B \sin(\omega t + \varphi) \tag{7.20}$$

și substituind în ecuațiile de mișcare se obține ecuația frecvențelor, determinîndu-se frecvențele naturale. Soluția generală a ecuațiilor de mișcare este compusă din două mișcări armonice de frecvențe ν_1 și ν_2:

$$\begin{aligned} x_1 &= A_1 \sin(\omega_1 t + \varphi_1) + A_2 \sin(\omega_2 t + \varphi_2), \\ x_2 &= B_1 \sin(\omega_1 t + \varphi_1) + B_2 \sin(\omega_2 t + \varphi_2), \end{aligned} \tag{7.21}$$

rapoartele $\frac{A_1}{B_1}$ și $\frac{A_2}{B_2}$ determinîndu-se din ecuațiile de mișcare, iar A_1, A_2, φ_1, φ_2 din condițiile inițiale: $x_1(0)$, $x_2(0)$, $\dot{x}_1(0)$, $\dot{x}_2(0)$.

* * *

7.4.1. Să se determine ecuațiile de mișcare, frecvențele naturale și soluția generală a mișcării sistemului din figura 7.4.1

7.4.2. Pe o coardă întinsă cu tensiunea T sînt prinse ca în figura 7.4.2 două mase egale, m_1 și m_2. Să se determine frecvențele naturale ale sistemului.

7.4.3. Să se determine frecvențele naturale ale unui sistem de două pendule cuplate între ele printr-un resort ca în figura 7.4.3 ($m_1 = m_2 = m$; $l_1 = l_2 = l$).

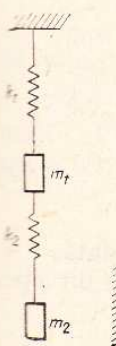


Fig. 7.4.1

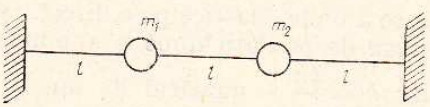


Fig. 7.4.2

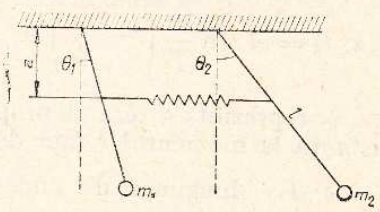


Fig. 7.4.3

7.4.4. Ecuațiile de mișcare ale pendulului de torsiune din figura 7.4.4 sînt: $\ddot{x} + 1\,000\ x - 100\ \theta = 0$, $\ddot{\theta} + 1\,000\ \theta - 100\ x = 0$. Să se determine mișcarea sistemului, dacă pendulul este lăsat liber după ce a fost rotit cu un radian.

7.4.5. Să se determine ecuația frecvențelor pentru sistemul din figura 7.4.5.

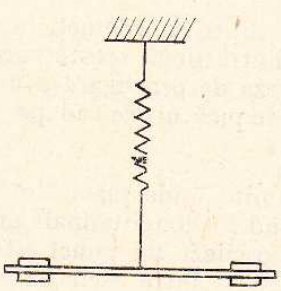


Fig. 7.4.4.

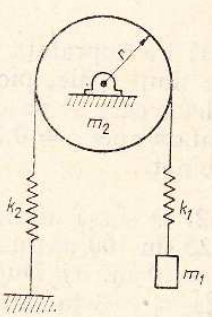


Fig. 7.4.5

7.4.6. Să se determine frecvențele naturale ale oscilațiilor sistemului din figura 7.4.6 ($m_1 = m_2 = m$; $r_1 = r_2 = r$; $J_1 = J_2 = J$; $k_1 = k_2 = k_3 = k$).

7.4.7. Să se determine frecvențele naturale de oscilație ale unui pendul dublu ($m_1 = m_2 = m$ și $l_1 = l_2 = l$) (fig. 7.4.7).

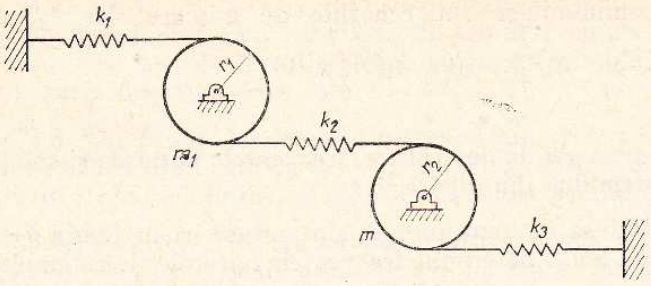


Fig. 7.4.6

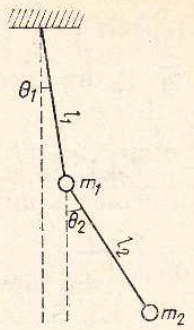


Fig. 7.4.7

7.5. Unde plane

Ecuația unei unde plane este de forma:

$$\xi(x, t) = A \sin \frac{2\pi}{T}\left(t - \frac{x}{c}\right) = A \sin 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda}\right) = A \sin (\omega t - kx) \qquad (7.22)$$

unde c reprezintă viteza de propagare a undei elastice pe o direcție dată, x — distanța la momentul t față de sursa de oscilații după o anumită direcție, $\lambda = c \cdot T$ — lungimea de undă, iar $k = \frac{2\pi}{\lambda}$ — numărul de undă.

Argumentul funcției trigonometrice reprezintă faza undei.

Două puncte situate pe aceeași direcție, la distanțele x_1 și x_2 față de sursa de oscilații, au diferența de fază:

$$\varphi_1 - \varphi_2 = 2\pi \frac{x_2 - x_1}{\lambda}. \qquad (7.23)$$

* * *

7.5.1. Pe suprafața apei dintr-un bazin cad dintr-un robinet, la intervale de timp egale, picături de apă. Distanța dintre două creste succesive ale undelor care se nasc fiind $d = 30$ cm, iar viteza de propagare a undelor la suprafața apei $c = 0{,}3$ m/s, să se afle numărul de picături ce cad pe minut din robinet.

7.5.2. O sursă aflată într-un mediu elastic emite unde plane de forma: $y = 0{,}25 \sin 100\,\pi t$ (mm). Lungimea de undă a undelor longitudinale produse este $\lambda = 10$ m. *a)* După cît timp va începe să oscileze un punct situat la distanța $x_1 = 8$ m față de sursă și ce defazaj există între oscilația acestui punct și sursă?

b) La ce distanță se află două puncte ale căror oscilații sînt defazate cu $\frac{\pi}{6}$?

c) Ce defazaj există între două puncte situate la distanța $\frac{\lambda}{2}$?

7.5.3. Amplitudinea unei oscilații neamortizate este $A = 10$ cm, frecvența $\nu = 4$ Hz, viteza de propagare a oscilației $c = 100$ m/s. Să se afle deplasarea față de poziția de echilibru, viteza și accelerația punctelor aflate la distanța $x = 75$ m față de sursa de oscilații la momentul $t = 1$ s de la începerea mișcării.

7.5.4. Două unde sinusoidale plane se propagă în aceeași direcție, avînd vitezele $c_1 = 220$ m/s, respectiv, $c_2 = 170$ m/s; distanța minimă dintre două puncte pentru care oscilațiile sînt în fază este $x_2 - x_1 = 5$ m, iar viteza de deplasare a acestor puncte $c = 30$ m/s. Să se determine lungimile de undă λ_1 și λ_2 corespunzătoare celor două unde.

7.5.5. Care este forma frontului undei de șoc produse de un glonț care zboară cu viteză supersonică?

7.5.6. Un avion cu reacție zboară cu viteza $v = 500$ m/s la o înălțime de 6 km. La ce distanță de o casă se află avionul cînd geamurile casei încep să vibreze?

7.5.7. Să se explice de ce dacă o sursă sonoră și un om se află aproximativ la aceeași altitudine, sunetul este auzit mai bine în sensul vîntului decît în sens contrar.

Capitolul 8

ACUSTICA

Viteza sunetului în solide este dată de relația:

$$c = \sqrt{\frac{E}{\rho}} \tag{8.1}$$

unde E este modulul de elasticitate și ρ este densitatea materialului.

Notînd cu c_0 viteza sunetului în gaze la temperatura de 0°C, viteză egală cu 332 m/s, viteza sa la temperatura t (°C) este egală cu:

$$c = c_0 \sqrt{1 + \alpha t} \tag{8.2}$$

unde α este coeficientul de dilatare al gazului.

Viteza maximă de deplasare a particulelor mediului în cîmpul sonor este:

$$v_m = 2\pi a \nu, \tag{8.3}$$

a fiind amplitudinea oscilației și ν frecvența sunetului.

Intensitatea sunetului într-un punct al cîmpului este dată de relația:

$$I = 2\pi^2 \cdot \nu^2 \cdot a^2 \cdot \rho \cdot c. \tag{8.4}$$

Valoarea maximă a presiunii sonore este:

$$p_m = 2\pi a \nu \rho c, \tag{8.5}$$

iar presiunea eficace este dată de:

$$\bar{p} = p_m / \sqrt{2}. \tag{8.6}$$

Măsurarea intensităților sonore se face în practică prin următoarele scări de nivel de intensitate:

a) *nivel de intensitate sonoră*, N_s, care măsoară intensitatea excitației, are ca unitate b e l și este dat de relația:

$$N_s = \log \frac{I}{I_0}, \tag{8.7}$$

unde $I_0 = 10^{-12}$ W/m² este pragul audibil inferior pentru sunetul de 1 kHz. Presiune eficace a sunetului de 1 kHz la pragul de audibilitate este $\bar{p}_0 = 2 \cdot 10^{-4}$ barie;

b) *nivel de intensitate auditivă*, N_a, care măsoară intensitatea senzației, are ca unitate f o n și este dat de relația:

$$N_a = 10 \log \frac{I}{I_{a0}}, \tag{8.8}$$

unde I_{a0} este pragul audibil inferior pentru frecvența sunetului respectiv.

Un sunet produs la distanța d_0 de origine va avea la distanța d de origine intensitatea:

$$I_d = \frac{I_{d_0}}{(d - d_0)^2} \tag{8.9}$$

pentru cazul undelor sferice ce se propagă în spațiul tridimensional.

Absorbția sunetului la distanța d este dată de relația:

$$I_d = I_{d_0} \exp\{-m(d - d_0)\}, \tag{8.10}$$

unde m este coeficientul de absorbție al mediului.

Frecvența aparentă a sunetului prin efect Doppler, ν', este:

$$\text{a)} \qquad \nu' = \nu \frac{1}{1 \mp \frac{v}{c}} \tag{8.11}$$

în cazul apropierii sau, respectiv, al depărtării sursei de sunet, de frecvență ν cu viteza v:

$$\text{b)} \qquad \nu' = \nu\left(1 \pm \frac{v}{c}\right) \tag{8.12}$$

în cazul apropierii sau, respectiv, al depărtării observatorului de sursa de sunet, cu viteza v.

Frecvențele de vibrație ale coardelor vibrante sînt:

$$\nu = \frac{n}{2l}\sqrt{\frac{P}{\pi r^2 \rho}} \tag{8.13}$$

unde $n = 1, 2, 3, \ldots$ este un număr întreg, l este lungimea coardei, P este forța cu care aceasta este întinsă și r este raza ei.

Tuburile sonore: a) *închise* întăresc frecvențele date de relația

$$\nu = (2n - 1)\frac{c}{4l}; \tag{8.14}$$

b) *deschise* întăresc frecvențele date de relația

$$\nu = n\frac{c}{2l} \tag{8.15}$$

unde $n = 1, 2, 3, \ldots$

Intervalul muzical dintre două sunete este definit de raportul frecvențelor acestor sunete.

Numele și intervalele celor șapte sunete ale gamei diatonice, zisă și „naturală", raportate la Do al aceleiași game sînt date în tabelul următor.

Tabelul 2

Denumirea sunetului	Do_1	Re_1	Mi_1	Fa_1	Sol_1	La_1	Si_1	Do_2
Raportul frecvențelor	1	$\frac{9}{8}$	$\frac{5}{4}$	$\frac{4}{3}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{5}{3}$	$\frac{15}{8}$	2

(8.16)

264 440 528

8.1. Se excită vibrațiile unui diapazon cu frecvența de 440 Hz. Să se determine lungimea de undă în aer la 20°C a undelor emise de diapazon. Care va fi lungimea de undă a acestora dacă diapazonul ar fi cufundat în apă? ($c_{apă} = 1\,450$ m/s.)

8.2. Un hidrolocator ultrasonor emite vibrații cu frecvența de 40 kHz. Să se determine lungimea de undă a ultrasunetelor în apă. Care este adîncimea mării, dacă într-un anumit loc, impulsul sonor al hidrolocatorului se întoarce după 0,4 s de la emisie? (Viteza ultrasunetului în apă este de 1 450 m/s.)

8.3. În ce raport variază lungimea de undă a undelor sonore la trecerea lor din oțel în aer? Temperatura aerului este de 20°C.

8.4. Viteza de propagare a sunetului în petrol este de 1 330 m/s, iar densitatea petrolului este $\rho = 800$ kg/m³. Să se determine modulul de compresibilitate al petrolului, χ.

8.5. Presiunea maximă a sunetului de frecvență 256 Hz la pragul de audibilitate este de 0,005 barie, iar la pragul de durere este de 2 000 barie. Știind că temperatura aerului este de 20°C și densitatea sa de 1,293 kg/m³, să se afle: *a)* amplitudinea vibrațiilor particulelor și a variației presiunii sonore, *b)* viteza maximă a particulelor și *c)* intensitatea sunetului în cele două cazuri.

8.6. Raportul dintre presiunea eficace a sunetului de 2 048 Hz la pragul de durere al urechii și cea la pragul de audibilitate este egal cu $5{,}33 \cdot 10^6$. Să se afle raportul intensităților sunetelor respective.

8.7. Nivelul de intensitate sonoră în dB și nivelul de intensitate auditivă în fon al unui sunet se exprimă prin același număr. Ce frecvență are acest sunet?

8.8. O mașină de șlefuit produce un zgomot a cărui intensitate auditivă este de 80 fon. Cîte asemenea mașini reunite produc un zgomot apropiat de pragul de durere al urechii, știind că acesta este de 130 fon?

8.9. Un sunet de intensitate egală cu 0,1 W/m² are nivelul de intensitate sonoră diferit cu 1 dB față de alt sunet. Să se afle intensitatea celui de-al doilea sunet, ca și amplitudinile presiunilor celor două sunete. Densitatea aerului este egală cu 1,293 kg/m³, iar temperatura sa este de 20°C.

8.10. Amplitudinea presiunii pentru un sunet la pragul de audibilitate este 10^{-4} dyn/cm². Care este amplitudinea presiunii acestui sunet, dacă el are nivelul de intensitate auditivă egal cu 80 fon? Care este nivelul de intensitate sonoră al sunetului?

8.11. Presiunile maxime corespunzătoare pragului de audibilitate pentru frecvențele de 32 Hz, 256 Hz, 1 000 Hz și 2 048 Hz sînt de, respectiv, 6 dyn/cm², $5 \cdot 10^{-3}$ dyn/cm², $2{,}82 \cdot 10^{-4}$ dyn/cm² și $3 \cdot 10^{-4}$ dyn/cm². Să se afle nivelele de intensitate sonoră și auditivă pentru patru sunete avînd frecvențele de mai sus și presiunea maximă de 1 dyn/cm². Să se discute rezultatele.

8.12. La distanța de 20 m de sursa sonoră de dimensiuni punctiforme, nivelul de intensitate auditivă este de 20 fon. Neglijînd absorbția, să se calculeze nivelul de intensitate auditivă la distanța de 10 m de sursă și distanța la care sunetul nu se mai aude.

8.13. Un observator aflat la distanța de 10 m de un diapazon care oscilează, sesizează dispariția sunetului diapazonului cu 20 s mai devreme decît

un observator care se află la distanța de 1 m. Să se determine coeficientul de amortizare a oscilațiilor diapazonului. Se neglijează absorbția sunetului în aer.

8.14. Să se calculeze eroarea relativă asupra rezultatului problemei precedente, care se datorește neglijării absorbției sunetului în aer. Se presupune că valoarea coeficientului mediu de absorbție al aerului este $m = 10^{-4}$ cm.

8.15. Un sunet se propagă printr-un tub de lungime 1 m umplut cu vată de sticlă. Nivelul de intensitate sonoră la începutul tubului este de 50 dB, iar la capătul său este jumătate din valoarea inițială. Să se afle coeficientul mediu de absorbție al vatei de sticlă.

8.16. Să se calculeze puterea unei surse sonore punctiforme, dacă nivelul intensității sonore este de 30 dB la distanța de 100 m. Coeficientul de absorbție este 10^{-4} cm^{-1}.

8.17. Să se calculeze nivelul de intensitate sonoră și auditivă al unei surse sonore de putere 10^{-5} W la frecvența de 80 Hz, la distanța de 10 m. Se dă presiunea maximă a sunetului corespunzătoare pragului de audibilitate, egală cu $3 \cdot 10^{-3}$ baric. Se neglijează absorbția sunetului. Temperatura aerului este de 20°C, iar densitatea sa este egală cu 1,293 kg/m^3.

8.18. Frecvența sunetului fundamental al sirenei unei locomotive care merge cu viteza de 54 km/h este de 600 Hz. Care este frecvența aparentă a sirenei pentru un observator care se află în alt tren care merge în sens opus locomotivei, cu viteza de 72 km/h? Temperatura aerului este de 35°C.

8.19. Să se rezolve problema precedentă pentru cazul în care trenul cu observatorul merge în același sens cu locomotiva și sirena începe să fluiere: *a)* înainte de întîlnirea trenurilor, *b)* după ce trenurile s-au întîlnit.

8.20. Un marfar lung se deplasează în linie dreaptă cu viteza de 36 km/h apropiindu-se de un tunel săpat într-un perete de stîncă vertical. Locomotiva scoate un fluierat lung, a cărui frecvență principală este de 340 Hz. Atît fluieratul, cît și ecoul datorat peretelui sînt auzite: *a)* de către mecanic, *b)* de către o persoană aflată pe pămînt, în dreptul locomotivei, cînd aceasta începe să fluiere. Cîte bătăi pe secundă aude fiecare persoană? Viteza de propagare a sunetului în aer se va lua egală cu 340 m/s.

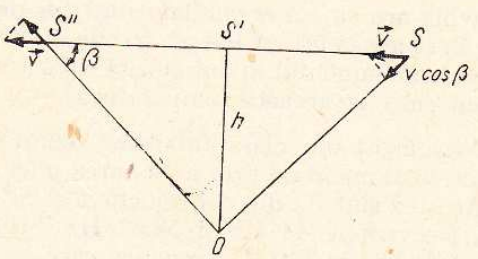


Fig. 8.21.

8.21. O sirenă situată pe un avion care zboară cu viteza de 100 m/s, paralel cu solul, la înălțimea $h = 1\,000$ m, emite un sunet puternic, de frecvență principală 500 Hz și durată 20 s, început atunci cînd avionul se află la distanța de 1 410 m de un observator fix situat pe sol.

Să se afle între ce limite variază frecvența sunetului perceput de observator. Viteza de propagare a sunetului în aer, $c = 340$ m/s.

8.22. Doi observatori sînt situați la distanța de 2 km, unul spre est și altul spre vest față de locul unei explozii. Să se afle diferența de timp dintre momentul perceperii începerii exploziei de către primul observator și de către cel de-al doilea, dacă vîntul bate cu viteza constantă de 5 m/s dinspre S—V, făcînd un unghi cu meridianul de 60°. Temperatura aerului atmosferic este de 20°C.

8.23. Datorită variației temperaturii aerului cu altitudinea și deci a variației vitezei de propagare a sunetului, o suprafață de undă plană și inițial verticală se va înclina în propagarea sa.

Dacă variația temperaturii aerului atmosferic cu altitudinea este $\frac{d\theta}{dh} = -6$ grd/km, să se evalueze pentru o atmosferă liniștită, la ce distanță de locul trecerii unei unde plane, direcția de propagare a energiei este ridicată la înălțimea de 3 m de la sol.

8.24. Sunetul fundamental emis de o coardă produce $n = 4$ bătăi pe secundă cu cel emis de un diapazon. Dacă se scurtează coarda cu 1/100 din lungimea ei, ea intră în rezonanță cu diapazonul. Să se determine frecvența de oscilație a diapazonului.

8.25. Să se determine viteza de propagare a sunetului fundamental printr-o coardă tensionată la 25 kgf, dacă lungimea ei este de 80 cm și masa ei este de 5 g ($g = 10$ m/s^2).

8.26. Frecvența lui La_1 fundamental este 440 Hz. Care este frecvența lui Sol_1 (din aceeași octavă)?

8.27. O coardă este acordată pentru a produce ca sunet fundamental La_1 de frecvență 440 Hz. Să se calculeze frecvențele primelor 12 armonice și să se găsească notele ce le corespund. Să se discute rezultatul.

8.28. Două tuburi sonore, unul închis și altul deschis, au aceeași lungime. Tubul deschis are ca fundamentală Do_1 cu frecvența 264 Hz. Se cere: *a)* frecvența armonicei a IV-a a tubului deschis și frecvența armonicei a V-a a tubului închis; *b)* intervalul muzical care există între aceste sunete și notele care le corespund.

8.29. Un tub închis are ca sunet fundamental Si_1 de frecvență 495 Hz, atunci cînd se suflă în el aer la 0°C. Care ar trebui să fie temperatura aerului, pentru ca sunetul fundamental al tubului să aibă frecvența de 528 Hz? Ce notă este sunetul emis la această temperatură?

8.30. Cornul, instrument din clasa tuburilor sonore deschise, are posibilitatea de a avea două fundamentale prin acționarea unei clapete care variază lungimea tubului. Acestea sînt Fa din contraoctavă și $Si^{\flat}$ din aceeași octavă, care au, respectiv, frecvențele 44 Hz și 58,67 Hz. Știind că atît cornul în Fa, cît și cornul în $Si^{\flat}$ dau ca ultime armonice care se mai aud, sunete de aceeași frecvență și anume, de 704 Hz, să se afle cîte armonice se pot auzi pe fiecare dintre instrumente și care este nota care corespunde ultimului sunet auzit. Se știe că La_1 are frecvența de 440 Hz.

REZOLVĂRI

Capitolul 1

CINEMATICA

1.1. Mișcarea uniformă

1.1.1. Notăm viteza apei cu v_1 și viteza bărcii cu v_2. Spațiul parcurs de barcă de la debarcader în timpul $t = 20$ de minute este $S_2 = OA$, iar șalupa este prinsă la distanța S_1 de debarcader (fig. 1.1.1. R). Distanța dintre punctele A și B este:

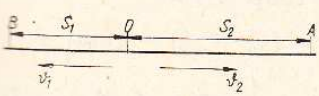


Fig. 1.1.1R

$$S = S_1 + S_2. \qquad (1)$$

Explicitînd această expresie, se obține:

$$(v_1 + v_2)\left(\frac{S_1}{v_1} - t\right) = (v_2 - v_1)\, t + S_1, \qquad (2)$$

de unde rezultă că:

$$S_1 = 2\ v_1 t = 2 \text{ km}. \qquad (3)$$

1.1.2. $v_r = 1$ km/h, $v_s = 4$ km/h.

1.1.3. $$\bar{v} = \frac{4v_1v_2v_3v_4}{v_2v_3v_4 + v_1v_3v_4 + v_1v_2v_4 + v_1v_2v_3} = 1{,}92 \text{ m/s}.$$

1.1.4. $$\bar{v} = \frac{2v_1(v_2 + v_3)}{2v_1 + v_2 + v_3} = 62{,}4 \text{ km/h}.$$

1.1.5. Spațiul parcurs de mobilul cu viteza v_1 este $s_1 = v_1t_1$, iar spațiul parcurs de mobilul cu viteza v_2 este $s_2 = v_2t_2$. Din grafic (fig. 1.1.5R) se vede că $s_1 = s_2 + s_0$, iar $t_1 = t = t_2 + \tau$. Rezultă în final că

$$t = \frac{v_2\tau - s_0}{v_2 - v_1}, \quad s = v_1\frac{v_2\tau - s_0}{v_2 - v_1}. \qquad (1)$$

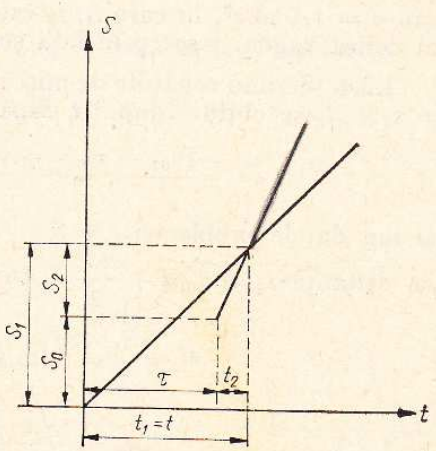


Fig. 1.1.5R

1.2. Mișcarea uniform variată

1.2.1. $$a = \frac{2(s_1 + s_2) - \dfrac{2s_1(t_1 + t_2)}{t_1}}{(t_1 + t_2)^2 - t_1(t_1 + t_2)} = 0{,}28 \text{ m/s}^2 \qquad (1)$$

$$v_0 = \frac{2s_1 - at_1^2}{2t_1} = 4{,}72 \text{ m/s}. \quad (2)$$

1.2.2. Mobilele pleacă din punctele x_0 și y_0, iar după un timp t se vor afla în punctele x și y, la distanța D unul de altul (fig. 1.2.2. R). Mișcarea fiind uniform variată, ecuațiile de mișcare au forma:

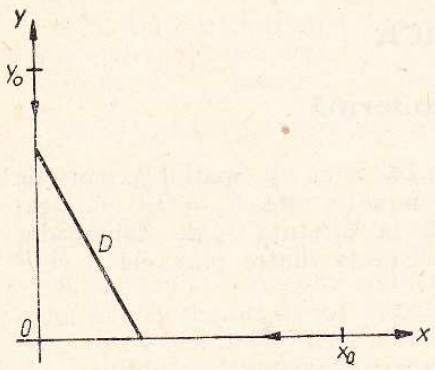


Fig. 1.2.2R

$$x = x_0 - \frac{1}{2} a_1 t^2, \quad (1)$$

$$y = y_0 - \frac{1}{2} a_2 t^2. \quad (2)$$

Pătratul distanței dintre cele două mobile, pentru un timp t, este

$$D^2 = x^2 + y^2 = (x_0^2 + y_0^2) - (x_0 a_1 + y_0 a_2)\, t^2 + \frac{1}{4}(a_1^2 + a_2^2)\, t^4. \quad (3)$$

Pentru ca această distanță să fie minimă, derivata de ordinul unu a ecuației (3) trebuie să fie egală cu zero, adică:

$$\frac{d(D)}{dt} = 0. \quad (4)$$

Efectuîndu-se calculele, din relația (4) obținem:

$$t_m = \left[\frac{2(x_0 a_1 + y_0 a_2)}{a_1^2 + a_2^2}\right]^{1/2}, \quad (5)$$

$$D_m = \frac{y_0 a_1 - x_0 a_2}{(a_1^2 + a_2^2)^{1/2}}. \quad (6)$$

1.2.3.
$$\sqrt{a} = \frac{2\sqrt{2S}\,(2t_1 - t_2)}{2t_1^2 - t_2^2},$$

sau $a = 1{,}1$ m/s^2, în care t_1, t_2 este timpul în care primul vagon, respectiv, al doilea vagon, trece prin fața șefului de gară.

1.2.4. Scriind ecuațiile de mișcare pentru cei doi bicicliști cu condiția $s_1 = s_2 + d$, se obține timpul t după care cei doi bicicliști se întîlnesc

$$t = \frac{-(v_{01} - v_{02}) + \sqrt{(v_{01} - v_{02})^2 + 2(a_1 - a_2)\, d}}{a_1 - a_2}, \quad (1)$$

și din datele problemei $t = 6$ s. Primul biciclist îl va întîlni pe al doilea la distanța $s_1 = v_{01}\, t + \frac{a_1 t^2}{2} = 66$ m. Vitezele medii sînt:

$$\bar{v}_1 = \frac{s_1}{t} = 11 \text{m/s}; \quad \bar{v}_2 = \frac{s_1 - d}{t} = 8 \text{ m/s}. \quad (2)$$

1.2.5.
$$\Delta t_n = \frac{\sqrt{n+1-k} - \sqrt{n-k}}{\sqrt{m+1-k} - \sqrt{m-k}}\, t.$$

1.3. Mișcarea în cîmp gravitațional

1.3.1. $$t = \frac{-v_1 + \sqrt{v_0^2 - v_1^2}}{g} + \frac{v_0}{g}.$$

1.3.2. $$t = n \pm \sqrt{n(n-1)}.$$

1.3.3. $$v_0 = h\sqrt{\frac{g}{2H}} = 5 \text{ m/s}.$$

1.3.4. $t = 6$ s, $h = 294$ m, $v = 78{,}4$ m/s.

1.3.5. $$h_1 = \frac{gt^2}{2}, \tag{1}$$

$$h_2 = \frac{3gt^2}{2} = (2 \cdot 2 - 1)\frac{gt^2}{2}, \tag{2}$$

$$h_3 = \frac{5\,gt^2}{2} = (2 \cdot 3 - 1)\frac{gt^2}{2}, \tag{3}$$

sau prin generalizare

$$h_n = (2n-1)\frac{gt^2}{2}, \tag{4}$$

în care h_1, h_2, ... h_n sînt spațiile parcurse în timpul t. Din relațiile (1), (2), (3), și (4) rezultă egalitățile

$$\frac{h_1}{1} = \frac{h_2}{3} = \cdots = \frac{h_n}{2n-1} = \frac{h}{N^2}, \tag{5}$$

sau

$$h_n = \frac{(2n-1)\,h}{N^2}. \tag{6}$$

Pentru cazul particular $h = 270$ m și $N = 3$, din relația (6) obținem:

$$h_1 = 30 \text{ m}, \quad h_2 = 90 \text{ m}, \quad h_3 = 150 \text{ m}.$$

1.3.6. $$t = \frac{v_0\left(1 \pm \sqrt{1 - \frac{1}{n}}\right)}{g},$$

$$v = \pm\, v_0\sqrt{1 - \frac{1}{n}}.$$

1.3.7. $$t = \frac{2v_0}{g}\sqrt{1 - \frac{1}{n}},$$

(vezi și fig. 1.3.7 R).

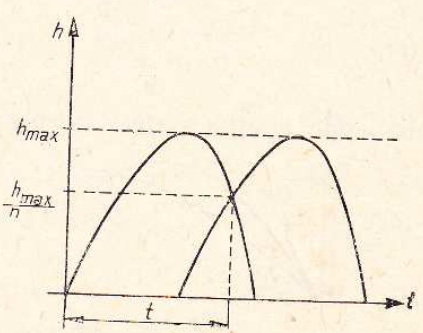


Fig. 1.3.7R

1.3.8. Viteza inițială necesară pentru ca proiectilul să atingă ținta este dată de relația:

$$v_0^2 = \frac{gd^2}{2} \cdot \frac{1}{(d \operatorname{tg} \alpha - h) \cos^2 \alpha}, \tag{1}$$

valabilă pentru diverse valori ale lui α (vezi fig. 1.3.8 R). Pentru a calcula valoarea lui α care determină valoarea minimă a lui v_0, derivăm relația (1) și o egalăm cu zero. Obținem:

$$(\operatorname{tg} \alpha)_{\min} = (h + \sqrt{d^2 + h^2})/d. \tag{2}$$

Introducînd relația (2) în relația (1), obținem valoarea minimă a vitezei inițiale:

$$v_{0\min} = [gd + g(h^2 + d^2)^{1/2}]^{1/2}.$$

1.3.9. Înălțimea la care se află ținta este

$$h = d \operatorname{tg} \alpha, \tag{1}$$

iar din ecuația traiectoriei rezultă

$$h = v_0 t \sin \beta - \frac{gt^2}{2}; \tag{2}$$

pe de altă parte,

$$d = v_0 t \cos \beta. \tag{3}$$

Egalînd relațiile (1) și (2) și introducînd timpul din relația (3) se obține în final

$$v_0 = \frac{1}{\cos \beta} \sqrt{\frac{g}{2} \frac{d}{\operatorname{tg} \beta - \operatorname{tg} \alpha}} = 173 \text{ m/s}. \tag{4}$$

1.3.10. Conform figurii 1.3.10 R,

$$v_x = v_0, \; v_y = gt \tag{1}$$

sau

$$v = \sqrt{v_0^2 + g^2 t^2}, \tag{2}$$

$$a_t = \frac{dv}{dt} = \frac{d(\sqrt{v_0^2 + g^2 t^2})}{dt} = \frac{g^2 t}{\sqrt{v_0^2 + g^2 t^2}}. \tag{3}$$

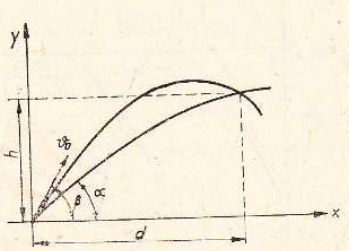


Fig. 1.3.8R

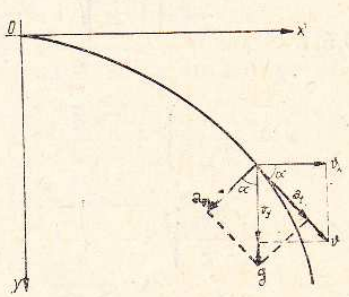


Fig. 1.3.10R

Din datele problemei: $a_t = 3{,}85$ m/s².

Din figura 1.3.10 R mai rezultă că

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{v_y}{v_x} = \frac{gt}{v_0}, \tag{4}$$

iar pe de altă parte

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{a_t}{a_n}. \tag{5}$$

Din relațiile (4) și (5) rezultă expresia pentru accelerația normală,

$$a_n = a_t \frac{v_0}{gt} = \frac{v_0 g}{\sqrt{v_0^2 + g^2 t^2}} = 9{,}23 \text{ m/s}^2. \tag{6}$$

1.3.11. $t = \dfrac{v_0 \cos \alpha}{g} (\operatorname{tg} \alpha - \operatorname{tg} \beta) = 1{,}15$ s.

1.3.12. $d = 2v_0 t \sin \dfrac{\alpha_2 - \alpha_1}{2} = 9$ m.

1.3.13. Înălțimea maximă de ridicare este

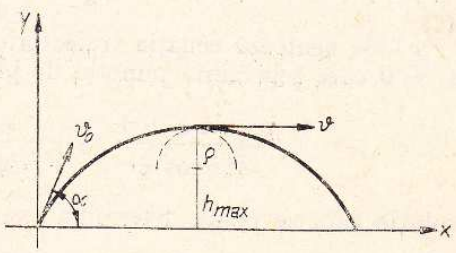


Fig. 1.3.13R

$$h_{\max} = \frac{v_0^2 \sin^2 \alpha}{2g}. \tag{1}$$

Raza de curbură, din figura 1.3.13 R, este egală cu

$$\rho = \frac{v^2}{a_n}, \tag{2}$$

în care $v = v_0 \cos \alpha$,

$$a_n = g, \tag{3}$$

sau

$$\rho = \frac{v_0^2 \cos^2 \alpha}{g}. \tag{4}$$

Combinînd relațiile (1) și (4) obținem expresia pentru viteza inițială și pentru unghiul de aruncare

$$v_0 = \sqrt{g(2h_{\max} + \rho)} = 19{,}6 \text{ m/s}, \tag{5}$$

iar

$$\operatorname{tg} \alpha = \sqrt{\frac{2h_{\max}}{\rho}} = \sqrt{3}, \ \alpha = 60°. \tag{6}$$

1.3.14. *a)* Eliminînd timpul din ecuațiile de mișcare obținem

$$y = \frac{kv_0 \sin \alpha + 1}{kv_0 \cos \alpha} x + \frac{1}{k^2 g} \ln\left(1 - \frac{kg}{v_0 \cos \alpha} x\right). \qquad (1)$$

b) Din condiția $\frac{dy}{dt} = 0$ se determină timpul pentru care mobilul atinge înălțimea maximă:

$$t_m = \frac{1}{kg} \ln (kv_0 \sin \alpha + 1). \qquad (2)$$

Introdus în ecuația de mișcare (1), obținem:

$$y_m = \frac{v_0 \sin \alpha}{kg} - \frac{1}{k^2 g} \ln (kv_0 \sin \alpha + 1). \qquad (3)$$

c) Se egalează ecuația traiectoriei (1) cu zero și se obțin două soluții: $x_1 = 0$ care reprezintă punctul de plecare al mobilului și

$$\frac{kv_0 \sin \alpha + 1}{kv_0 \cos \alpha} x_2 + \frac{1}{k^2 g} \ln\left(1 - \frac{kg}{v_0 \cos \alpha} x_2\right) = 0,$$

soluție care se poate determina exact numai grafic.

1.3.15. *a)* $x_{max} = \frac{v_0^2 \sin 2\alpha}{2g} = 5$ m. (1)

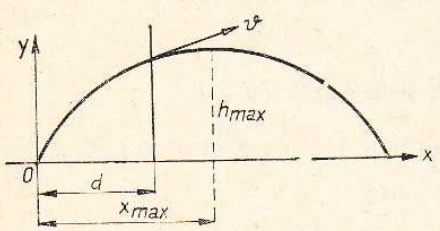


Fig. 1.3.15R

$x_{max} > d = 3$ m, deci ciocnirea are loc pe porțiunea ascendentă a traiectoriei (vezi figura 1.3.15 R).

b) Din ecuația traiectoriei rezultă că:

$$h = d \operatorname{tg} \alpha - \frac{g}{2} \frac{d^2}{v_0^2 \cos^2 \alpha} = 2{,}1 \text{ m}. \qquad (2)$$

c) $$v = \sqrt{(v_0^2 \cos^2 \alpha) + \left(v_0 \sin \alpha - \frac{gd}{v_0 \cos \alpha}\right)^2} = 7{,}6 \text{ m/s}. \qquad (3)$$

1.3.16. În cazul plan, locul geometric este un cerc determinat de ecuația

$$x^2 + \left(y \mp \frac{gt^2}{2}\right)^2 = (v_0 t)^2, \qquad (1)$$

iar cercul coboară cu viteza $v = gt$. În cazul tridimensional, locul geometric va fi o sferă.

1.3.17. $\sin 2\alpha = \frac{4dg}{v_0^2}$, de unde $\alpha \simeq 27°$.

1.3.18. $d = 8h \sin \alpha = 4$ m.

1.4. Mișcarea variată

1.4.1.

$$v = \frac{ds}{dt} = A - 2Bt + 3Ct^2, \tag{1}$$

$$a = \frac{dv}{dt} = -2B + 6Ct; \tag{2}$$

se dau diverse valori pentru timp și se reprezintă grafic $s = s(t)$, $v = v(t)$ și $a = a(t)$.

1.4.2

$$a = \frac{dv}{dt} = kt, \tag{1}$$

sau

$$dv = kt\,dt, \tag{2}$$

de unde prin integrare obținem

$$v = \frac{kt^2}{2} + C. \tag{3}$$

Deoarece la $t = 0$, $v = 0$, rezultă că $C = 0$, deci

$$v = \frac{kt^2}{2}; \tag{4}$$

pe de altă parte

$$\frac{ds}{dt} = \frac{kt^2}{2}, \tag{5}$$

de unde prin integrare, cu condiția inițială $s = s_0$ la $t = 0$, obținem

$$s = s_0 + \frac{kt^3}{6}. \tag{6}$$

Se vor reprezenta grafic relațiile (1), (4) și (6).

1.4.3.

$$\frac{dv}{dt} = -kv^2, \tag{1}$$

sau

$$\frac{dv}{v^2} = -k\,dt. \tag{2}$$

Prin integrare, ținînd seama și de condițiile inițiale, se obține

$$v = \frac{v_0}{kv_0t + 1}. \tag{3}$$

Pe de altă parte

$$\frac{ds}{dt} = \frac{v_0}{kv_0t + 1}. \tag{4}$$

Separînd variabilele și integrînd, obținem:

$$s = \frac{1}{k} \ln (kv_0 t + 1) + s_0. \tag{5}$$

1.4.4. Viteza mobilului depinde de timp după legea

$$v = \frac{c}{t} \tag{1}$$

sau ținînd seama de condițiile inițiale.

$$v = \frac{v_0 t_0}{t}. \tag{2}$$

Accelerația mobilului este

$$a = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = -\frac{v^2}{v_0 t_0}, \tag{3}$$

iar spațiul parcurs

$$S = v_0 t_0 \ln \frac{t}{t_0}. \tag{4}$$

Înlocuind relația (2) în relația (4) obținem în final:

$$v = v_0 \, \mathrm{e}^{-\frac{s}{v_0 t_0}} \tag{5}$$

1.4.5. Din condițiile inițiale rezultă că

$$v_0 = \frac{B}{A}. \tag{1}$$

Prin diferențierea legii spațiului se obține:

$$nA^n v^{n-1} \, \mathrm{d}v = v \, \mathrm{d}t, \tag{2}$$

iar prin integrare

$$t = \frac{nA^n}{n-1} (v^{n-1} - v_0^{n-1}). \tag{3}$$

Pentru un timp $t = \tau$, $v = kv_0$, astfel că relația (3) — ținînd seama și de relația (1) — ia forma finală:

$$\tau = \frac{nAB^{n-1}}{n-1} (k^{n-1} - 1). \tag{4}$$

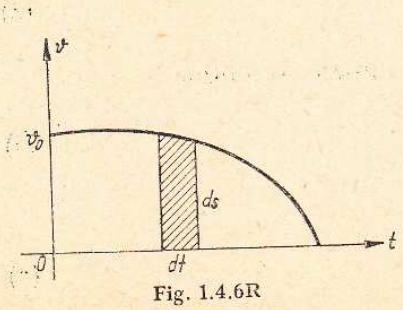


Fig. 1.4.6R

1.4.6. Viteza în funcție de timp este reprezentată în figura 1.4.6. R, iar spațiul parcurs de mobil este

$$s = \int_0^\tau v(t) \, \mathrm{d}t. \tag{1}$$

Din ecuația elipsei

$$\frac{v^2}{v_0^2} + \frac{t^2}{\tau^2} = 1, \tag{2}$$

rezultă că

$$v = \frac{v_0}{\tau}\sqrt{\tau^2 - t^2}. \tag{3}$$

Introducînd relația (3) în relația (1) și integrînd, se obține

$$s = \frac{\pi v_0 \tau}{4}. \tag{4}$$

Problema mai poate fi rezolvată și în alt mod, ținînd seama că relația (1) reprezintă de fapt un sfert din aria totală a elipsei, adică $\frac{\pi ab}{4}$. În cazul nostru, semiaxa mică a este egală cu v_0, iar semiaxa mare b este egală cu τ și obținem un rezultat identic cu relația (4).

1.4.7. Eliminînd timpul din cele două ecuații parametrice se obține ecuația traiectoriei:

$$4x = 3y + 4. \tag{1}$$

Componentele vitezei sînt:

$$v_x = \frac{dx}{dt} = 3e^t, \tag{2}$$

$$v_y = \frac{dy}{dt} = 4e^t,$$

ar viteza mobilului este

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = 5e^t. \tag{3}$$

Componentele accelerației sînt:

$$a_x = \frac{dv_x}{dt} = 3e^t, \tag{4}$$

$$a_y = \frac{dv_y}{dt} = 4e^t,$$

iar accelerația mobilului este

$$a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2} = 5e^t. \tag{5}$$

Din ecuațiile (1), (3) și (5) rezultă că mișcarea mobilului este rectilinie variată, viteza și accelerația fiind colineare și egale în modul.

1.4.8. Din condițiile problemei rezultă că:

$$\frac{m\dot{x}^2}{2} = Ax^4 \tag{1}$$

sau

$$\frac{dx}{dt} = x^2\left(\frac{2A}{m}\right)^{1/2}. \tag{2}$$

Separînd variabilele și integrînd, obținem

$$x(t) = \frac{x_0}{1 \pm x_0 t \left(\frac{2A}{m}\right)^{1/2}}.$$

1.4.9. Componentele vitezei sînt:

$$v_x = v_0 \cos \alpha \, e^{-\frac{gt}{c}} - c,$$

$$v_y = (c + v_0 \sin \alpha) \, e^{-\frac{gt}{c}}, \tag{1}$$

iar coordonatele mobilului,

$$x = \frac{c}{g} v_0 \cos \alpha \left(1 - e^{-\frac{gt}{c}}\right), \tag{2}$$

$$y = \frac{c^2}{g}\left(1 + \frac{1}{c} v_0 \sin \alpha\right)\left(1 - e^{-\frac{gt}{c}}\right) - ct.$$

Ecuația traiectoriei este:

$$y = \frac{cx}{v_0 \cos \alpha}\left(1 + \frac{1}{c} v_0 \sin \alpha\right) + \frac{c^2}{g} \ln\left(1 - \frac{gx}{cv_0 \cos \alpha}\right), \tag{3}$$

iar timpul de urcare pînă la înălțimea maximă

$$t_m = \frac{c}{g} \ln\left(1 + \frac{1}{c} v_0 \sin \alpha\right), \tag{4}$$

cu coordonatele corespunzătoare timpului maxim,

$$x_m = \frac{v_0^2 \sin^2 \alpha}{2g} \cdot \frac{1}{1 + \frac{1}{c} v_0 \sin \alpha}, \tag{5}$$

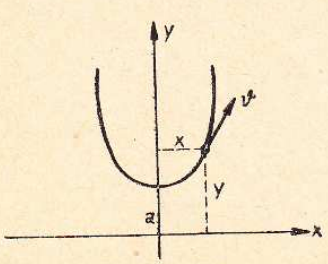


Fig. 1.4.10R

$$y_m = \frac{c}{g} v_0 \sin \alpha - \frac{c^2}{g} \ln\left(1 + \frac{1}{c} v_0 \sin \alpha\right).$$

1.4.10. Ținînd seama de funcțiile trigonometrice hiperbolice $\operatorname{sh} x = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x})$ și $\operatorname{ch} x = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x})$, ecuația traiectoriei se poate reprezenta grafic (vezi fig. 1.4.10 R).

Componentele vitezei se calculează astfel:

$$\frac{dy}{dt} = \frac{dy}{dx} \cdot \frac{dx}{dt},$$

sau

$$\dot{y} = \dot{x} \operatorname{sh} \frac{x}{a},$$

iar

$$v^2 = \dot{y}^2 + \dot{x}^2$$

sau

$$v^2 - \dot{x}^2 = \dot{x}^2 \operatorname{sh}^2 \frac{x}{a},$$

de unde

$$\dot{x} = \frac{va}{y}. \tag{1}$$

În mod analog

$$\dot{y} = v \operatorname{th} \frac{x}{a}. \tag{2}$$

Componentele acceleraţiei sînt:

$$\ddot{x} = -\frac{v^2a^2}{y^3} \operatorname{sh} \frac{x}{a}, \tag{3}$$

$$\ddot{y} = \frac{v^2a^2}{y^3}. \tag{4}$$

Acceleraţia totală este:

$$a^2 = \ddot{x}^2 + \ddot{y}^2$$

sau

$$a = \frac{v^2a}{y^2}. \tag{5}$$

Raza de curbură este:

$$\rho = \frac{v^2}{a_n}$$

şi cum $a_n = a$ rezultă că:

$$\rho = \frac{v^2}{a}. \tag{6}$$

1.4.11. Traiectoria mobilului este reprezentată în figura 1.4.11 R, ca și proiecțiile accelerației,

$$v = \dot{s} = ak\,e^{kt} = ks, \tag{1}$$

$$a_t = \dot{v} = ak^2\,e^{kt} = k^2 s, \tag{2}$$

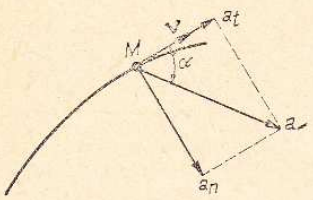


Fig. 1.4.11R

$$a = \frac{a_t}{\cos\alpha} = 2k^2 s, \tag{3}$$

$$a_n = \sqrt{a^2 - a_t^2} = \sqrt{3}k^2 s. \tag{4}$$

$$\rho = \frac{v^2}{a_n} = \frac{\sqrt{3}}{3}\,a\,e^{kt} = \frac{\sqrt{3}}{3}\,s. \tag{5}$$

1.4.12. Din figură se vede că:

$$v_x = v_t + v_r \cos\alpha. \tag{1}$$

$$v_y = v_r \sin\alpha, \tag{2}$$

au

$$\frac{dx}{dt} = v_t + \sqrt{2gy}\cos\alpha. \tag{3}$$

$$\frac{dy}{dt} = \sqrt{2gy}\sin\alpha. \tag{4}$$

Dacă înlocuim relația (3) în relația (4) și o integrăm, obținem ecuația traiectoriei:

$$(x\sin\alpha - y\cos\alpha)^2 = \frac{2v_t^2}{g}\,y, \tag{5}$$

care este o parabolă.

Cînd $y = h$, obținem:

$$v^2 = v_x^2 + v_y^2 = v_t^2 + 2gh + 2v_t\sqrt{2gh}\cos\alpha$$

sau

$$v = (v_t^2 + 2gh + 2v_t\sqrt{2gh}\cos\alpha)^{1/2}. \tag{6}$$

1.5. Mișcarea circulară

1.5.1.

$$\alpha = \omega_0 t - \frac{\varepsilon t^2}{2}, \tag{1}$$

iar

$$\omega = \omega_0 - \varepsilon t = 0.$$

Din ecuațiile (1) și (2) rezultă că:

$$\varepsilon = \frac{\omega_0^2}{4\pi n} = \frac{4}{5}\pi s^{-2}, \tag{3}$$

deoarece $\omega_0 = 4\pi$, iar $\alpha = 10\pi$.

1.5.2. Spațiul parcurs de greutatea G în timpul t este:

$$h = \frac{at^2}{2}, \tag{1}$$

iar de aici timpul

$$t = \left(\frac{2h}{a}\right)^{1/2}. \tag{2}$$

Din legea de mișcare a scripetelui,

$$\alpha = \frac{at^2}{2r}, \tag{3}$$

rezultă viteza unghiulară a scripetelui:

$$\omega = \frac{\mathrm{d}\alpha}{\mathrm{d}t} = \frac{at}{r}. \tag{4}$$

Viteza punctului P este:

$$v_P = \omega R = at\frac{R}{r}$$

și ținînd seama și de relația (2),

$$v_P = \frac{R}{r}(2ha)^{1/2}. \tag{5}$$

Accelerația normală a punctului P este: $a_n = \omega^2 R = a^2t^2\frac{R}{r^2}$, iar accelerația tangențială, $a_t = \frac{\mathrm{d}v_P}{\mathrm{d}t} = a\frac{R}{r}$. Rezultă accelerația punctului P:

$$a_P = (a_t^2 + a_n^2)^{1/2} = \frac{aR}{r^2}(r^2 + a^2t^4)^{1/2} \tag{6}$$

și ținînd seama și de relația (2),

$$a_P = \frac{aR}{r^2}(r^2 + 4h^2)^{1/2}. \tag{7}$$

1.5.3.

$$v = \frac{v_0 R}{R - v_0 t \operatorname{ctg}\alpha}.$$

1.5.4.

$$a_n = 2\alpha\varepsilon R, \tag{1}$$

iar

$$a = a_t \sqrt{1 + \frac{a_t^2 t^4}{R^2}},$$

sau

$$a = \varepsilon R \sqrt{1 + 4\alpha^2}, \tag{2}$$

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{1}{2\alpha}. \tag{3}$$

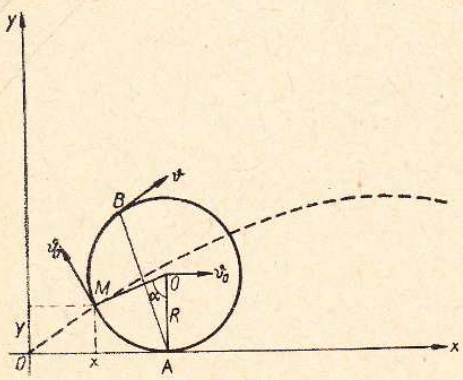


Fig. 1.5.5R

1.5.5. Mișcarea rezultantă este o mișcare compusă dintr-o mișcare de translație cu viteza v_0 și o mișcare de rotație. Coordonatele punctului material M (fig. 1.5.5 R), considerînd unghiul α ca variabilă, sînt date de relațiile:

$$x = R(\alpha - \sin \alpha), \tag{1}$$

$$y = R(1 - \cos \alpha). \tag{2}$$

Traiectoria descrisă parametric de ecuațiile (1) și (2) este reprezentată punctat în figura 1.5.5. R și poartă numele de *cicloidă*. Ținînd seama că $R\frac{d\alpha}{dt} = v_0$, componentele vitezei pe cele două axe sînt:

$$v_x = \frac{dx}{dt} = v_0(1 - \cos \alpha), \tag{3}$$

$$v_y = \frac{dy}{dt} = v_0 \sin \alpha, \tag{4}$$

iar viteza

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2}$$

este

$$v = 2v_0 \sin \frac{\alpha}{2}. \tag{5}$$

Componentele accelerației sînt:

$$a_x = \frac{dv_x}{dt} = \frac{v_0^2}{R} \sin \alpha, \tag{6}$$

$$a_y = \frac{dv_y}{dt} = \frac{v_0^2}{R} \cos \alpha, \tag{7}$$

iar accelerația $a = \frac{v_0^2}{R}$.

Unghiul φ pe care îl face vectorul viteză cu orizontala este

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{v_y}{v_x} = \frac{v_0 \sin \alpha}{v_0 (1 - \cos \alpha)} = \operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2}. \tag{8}$$

Spațiul S parcurs de un punct material care atinge de două ori consecutiv orizontala este

$$S = \int v \, dt = \int 2v_0 \sin \frac{\alpha}{2} \, dt = 2R \int_0^{2\pi} \sin \frac{\alpha}{2} \, d\alpha = 8R. \tag{9}$$

Din relațiile de mai sus se demonstrează imediat că viteza, în orice punct de pe traiectorie, este egală cu produsul dintre coarda $\overline{AB}$ (fig. 1.5,5. R) și viteza unghiulară ω, adică

$$v = \overline{AB} \cdot \omega. \tag{10}$$

1.5.6. Înălțimea de ridicare a noroiului este

$$h = y + s, \tag{1}$$

în care y este poziția noroiului pe cicloidă în momentul desprinderii, iar s este spațiul parcurs de acesta pe verticală, adică $s = \frac{v_y^2}{2g}$. Ținînd seama de problema precedentă și anume de relațiile (2) și (4), relația (1) se mai poate scrie sub forma:

$$h = R(1 - \cos \alpha) + \frac{v_0^2 \sin^2 \alpha}{2g}. \tag{2}$$

Din condiția $\frac{dh}{d\alpha} = 0$ se obține unghiul pentru care înălțimea h este maximă:

$$(\cos \alpha)_{max} = -\frac{Rg}{v_0^2}. \tag{3}$$

Introducînd relația (3) în relația (2) obținem înălțimea maximă

$$h_{max} = R + \frac{v_0^2}{2g} + \frac{R^2 g}{2v_0^2}. \tag{4}$$

1.5.7.

$$a_n = \frac{v^2}{R} = at + b, \tag{1}$$

sau

$$v = \sqrt{R(at + b)}, \tag{2}$$

$$a_t = \frac{dv}{dt} = \frac{a\sqrt{R}}{2\sqrt{at + b}}, \tag{3}$$

$$S = \int v \, dt = \frac{2\sqrt{R}}{3a} (at + b)^{3/2} + c. \tag{4}$$

1.5.8.
$$\omega = \frac{d\alpha}{dt} = 2\ at + b. \tag{1}$$

$$\varepsilon = \frac{d\omega}{dt} = 2a, \tag{2}$$

$$v = \omega R = R(2at + b), \tag{3}$$

$$a_t = 2aR,\ a_n = R(2at + b)^2. \tag{4}$$

1.5.9. Ecuațiile de mișcare, din figură, cu $OA = OM = R$, sînt:

$$x = R\cos kt + l\sin\frac{kt}{2}, \tag{1}$$

$$y = R\sin kt - l\cos\frac{kt}{2}. \tag{2}$$

Componentele vitezei, prin derivarea ecuațiilor (1) și (2), au forma:

$$v_x = \dot{x} = -Rk\sin kt + \frac{lk}{2}\cos\frac{kt}{2}, \tag{3}$$

$$v_y = \dot{y} = Rk\cos kt + \frac{lk}{2}\sin\frac{kt}{2}, \tag{4}$$

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = k\sqrt{R^2 + \frac{l^2}{4} - Rl\sin\frac{kt}{2}}. \tag{5}$$

Accelerația tangențială este:

$$a_t = \frac{dv}{dt} = \frac{-k^2\,Rl\cos\frac{kt}{2}}{4\sqrt{R^2 + \frac{l^2}{4} - Rl\sin\frac{kt}{2}}}, \tag{6}$$

iar componentele accelerației sînt:

$$a_x = \dot{v}_x = -Rk^2\cos kt - \frac{lk^2}{4}\sin\frac{kt}{2}, \tag{7}$$

$$a_y = \dot{v}_y = -Rk^2\sin kt + \frac{lk^2}{4}\cos\frac{kt}{2}, \tag{8}$$

cu accelerația totală

$$a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2} = k^2\sqrt{R^2 + \frac{l^2}{16} - \frac{Rl}{2}\sin\frac{kt}{2}}. \tag{9}$$

Accelerația normală este dată de relația:

$$a_n = \sqrt{a^2 - a_t^2} = k^2\sqrt{R^2 + \frac{l^2}{16} - \frac{Rl}{2}\sin\frac{kt}{2} - \frac{R^2l^2\cos^2 kt}{16\left(R^2 + \frac{l^2}{4} - Rl\sin\frac{kt}{2}\right)}}. \tag{10}$$

Raza de curbură este egală cu:

$$\rho = \frac{v^2}{a_n} =$$

$$= \frac{\left(4R^2 + l^2 - 4Rl \sin \frac{kt}{2}\right)^{3/2}}{\left(64R^4 + 16R^2l^2 + l^4 - 96R^3l \sin \frac{kt}{2} - 12Rl^3 \sin \frac{kt}{2} + 36R^2l^2 \sin^2 \frac{kt}{2}\right)^{1/2}}. \tag{11}$$

În cazul particular $\alpha = 0$, relațiile (1), (6), (10) și (11) devin:

$$x_0 = R, \; y_0 = -l,$$

$$v_0 = k\sqrt{R^2 + \frac{l^2}{4}},$$

$$a_{t0} = \frac{-k^2Rl}{4\left(R^2 + \frac{l^2}{4}\right)^{1/2}},$$

$$a_{n0} = k^2 \frac{8R^2 + l^2}{4(4R^2 + l^2)^{1/2}},$$

$$\rho_0 = \frac{(4R^2 + l^2)^{3/2}}{8R^2 + l^2}.$$

În cazul particular $\alpha = \pi$, aceleași relații devin:

$$x_1 = -R + l, \; y_1 = 0,$$

$$v_1 = k\left(R - \frac{l}{2}\right),$$

$$a_{t1} = 0,$$

$$a_1 = a_{n1} = k^2\left(R - \frac{l}{4}\right),$$

$$\rho_1 = \frac{(2R - l)^3}{4R - 1}.$$

1.5.10. Din figură se vede că

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{a_t}{a_n} = \frac{\varepsilon_z}{\omega_z^2}, \tag{1}$$

și ținînd seama că $\varepsilon_z = \dfrac{d\omega_z}{dt}$, rezultă din (1) ecuația diferențială

$$\operatorname{tg} \alpha \cdot dt = \frac{d\omega_z}{\omega_z^2} \tag{2}$$

care, integrată, ne duce la soluția

$$\sqrt{3}t = -\frac{1}{\omega_z} + C. \tag{3}$$

Ținînd seama de condiția inițială $\omega_z = -\omega_0$ la $t = 0$ soluția (3) ia forma finală:

$$\omega_z = -\frac{\omega_0}{1 + \omega_0\sqrt{3}t}. \tag{4}$$

Proiecția accelerației unghiulare este egală cu

$$\varepsilon_z = \operatorname{tg}\alpha \cdot \omega_z^2 = \sqrt{3}\,\frac{\omega_0^2}{(1 + \omega_0\sqrt{3}t)^2}, \tag{5}$$

iar accelerația tangențială este

$$a_t = r\varepsilon_z = \frac{\sqrt{3}r\omega_0^2}{(1 + \omega_0\sqrt{3}t)^2} \tag{6}$$

și accelerația normală este

$$a_n = r\omega_z^2 = \frac{r\omega_0^2}{(1 + \omega_0\sqrt{3}t)^2}. \tag{7}$$

Accelerația totală este egală cu

$$a = \sqrt{a_t^2 + a_n^2} = \frac{2r\omega_0^2}{(1 + \omega_0\sqrt{3}t)^2}. \tag{8}$$

Pentru determinarea dependenței unghiului la centru de timp, ne folosim de ecuația (4), ținînd seama că $\omega_z = \dfrac{d\alpha}{dt}$ și de condițiile inițiale, $\alpha = 0$ la $t = 0$. Obținem în final, după integrare, soluția:

$$\alpha = \frac{\sqrt{3}}{3}\ln\frac{1}{1 + \omega_0\sqrt{3}t}. \tag{9}$$

Înmulțind ecuația (3) cu $d\alpha$ și integrînd cu condițiile la limită date, obținem:

$$\omega_z = -\omega_0 e^{\sqrt{3}\alpha} \tag{10}$$

1.5.11. Din figura 1.5.11 R rezultă că:

$$\omega_2 = \omega_1\frac{R_1}{R_2}, \tag{1}$$

$$\varepsilon_2 = \varepsilon_1\frac{R_1}{R_2}, \tag{2}$$

$$a_{n1} = R_1\omega_1^2, \quad a_{n2} = \frac{R_1^2\omega_1^2}{R_2}. \tag{3}$$

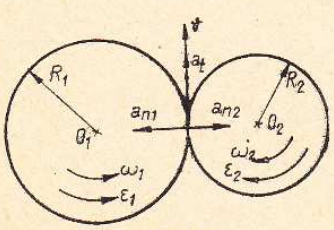


Fig. 1.5.11R

1.5.12. $$v = \frac{VR_1R_2R_3}{r_1r_2r_3}.$$

1.5.13. Ecuațiile parametrice mai pot fi scrise sub forma:

$$\frac{x}{A} = \cos\ \omega t,\ \frac{y}{B} = \sin\ \omega t \tag{1}$$

sau

$$\frac{x^2}{A^2} + \frac{y^2}{B^2} = 1; \tag{2}$$

traiectoria este deci o elipsă.

$$v_x = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = -\ A\,\omega\,\sin\,\omega t, \tag{3}$$

$$v_y = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = B\,\omega\cos\,\omega t, \tag{4}$$

iar viteza mobilului este

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = \frac{AB\omega}{h}, \tag{5}$$

în care

$$h = \frac{A^2B^2}{(B^4x^2 + A^4y^2)^{1/2}}. \tag{6}$$

Componentele accelerației sînt:

$$a_x = \frac{\mathrm{d}v_x}{\mathrm{d}t} = -\ A\omega^2\cos\,\omega t, \tag{7}$$

$$a_y = \frac{\mathrm{d}v_y}{\mathrm{d}t} = -\ B\omega^2\sin\omega t,$$

iar accelerația totală

$$a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2} = \omega^2 r, \tag{8}$$

în care $r^2 = x^2 + y^2$.

Accelerația normală este

$$a_n = \omega^2 h, \tag{9}$$

iar raza de curbură a traiectoriei

$$\rho = \frac{v^2}{a_n} = \frac{A^2B^2}{h^3}. \tag{10}$$

1.5.14. $v = \sqrt{r^2\omega^2 + c^2}$; $v_x^2 + v_y^2 = r^2\omega^2$; $a = a_n = r\omega^2 = \frac{v^2}{r}$; sau, în coordonate cilindrice, $a_n = \frac{v^2\,\cos^2\alpha}{r}$, în care α este panta elicei.

$$\rho = \frac{r}{\cos^2\alpha}.$$

1.6. Mișcarea oscilatorie armonică

1.6.1. Ecuația traiectoriei: $\frac{x^2}{100} + \frac{y^2}{100} = 1$,

$$v = 0{,}3 \text{ m/s}; \quad a = 0{,}9 \text{ m/s}^2.$$

1.6.2. *a)* Eliminînd timpul din ecuațiile de mișcare, obținem:

$$\frac{x}{A} = \left(2\frac{y^2}{B^2} - 1\right)\cos\varphi + 2\frac{y}{B}\sin\varphi\sqrt{1 - \frac{y^2}{B^2}}; \tag{1}$$

b) pentru $\varphi = 0$ și π;

c) $v = 2Ak \sin\varphi$ și este de-a lungul axei Ox. (2)

1.6.3. Ecuația de mișcare mai poate fi pusă sub forma:

$$x = 1 + \sin\left(6\pi t + \frac{\pi}{2}\right), \tag{1}$$

care este o mișcare oscilatorie armonică în jurul punctului $x_1 = 1$ de pe abscisă, de amplitudine egală cu 1.

$$T = \frac{1}{3}\text{ s}, \quad v_x = 6\pi\cos\left(6\pi t + \frac{\pi}{2}\right), \quad a_x = 36\pi^2 - 36\pi^2 x. \tag{2}$$

1.6.4. $x_2 = 7 \sin(40t + 0{,}467\pi)$, $x = 9 \sin(40t + 0{,}282\pi)$.

1.6.5. Din prima ecuație de mișcare rezultă $\cos kt = \frac{x}{a}$, care, introdusă în a doua ecuație de mișcare, rezultă expresia:

$$y = \frac{g}{k^2}\left(1 - \frac{x}{a}\right), \tag{1}$$

care este traiectoria mobilului, o dreaptă cu $|x| \leqslant a$.

Pentru a determina spațiul parcurs, diferențiem ecuațiile parametrice de mișcare:

$$\mathrm{d}x = -ak \sin kt \, \mathrm{d}t, \tag{2}$$

$$\mathrm{d}y = \frac{g}{k}\sin kt \, \mathrm{d}t, \tag{3}$$

de unde rezultă:

$$\mathrm{d}s = (\mathrm{d}x^2 + \mathrm{d}y^2)^{1/2}$$

sau

$$\mathrm{d}s = \left(a^2k^2 + \frac{g^2}{k^2}\right)^{1/2} \sin kt \, \mathrm{d}t. \tag{4}$$

Integrînd relația (4) rezultă:

$$s = -\left(a^2k^2 + \frac{g^2}{k^2}\right)^{1/2} \frac{1}{k} \cos kt + C. \tag{5}$$

Din condiția inițială $t = 0$, $s = 0$, rezultă expresia pentru constanta de integrare:

$$C = \frac{1}{k}\left(a^2k^2 + \frac{g^2}{k^2}\right)^{1/2}, \tag{6}$$

care, introdusă în relația (5), ne dă ecuația de mișcare:

$$s = \frac{1}{k}\left(a^2k^2 + \frac{g^2}{k^2}\right)(1 - \cos kt), \tag{7}$$

care descrie o mișcare oscilatorie armonică.

1.7. Compunerile mișcărilor

1.7.1. *a.* Viteza relativă a bărcii în raport cu rîul este $v_r = v_1$, iar viteza de transport este egală cu viteza rîului, $v_t = v_2$. Viteza absolută este $\vec{v}_a = \vec{v}_r + \vec{v}_t$, sau $v_a^2 = v_r^2 + v_t^2 + 2v_rv_t \cos \alpha$, de unde

$$v_a = (v_1^2 + v_2^2 + 2v_1v_2 \cos \alpha)^{1/2}, \tag{1}$$

unde α este unghiul pe care îl face viteza bărcii cu malul. Dacă $\alpha = 0$, barca merge în același sens cu apa rîului și $v_a = v_1 + v_2$. Dacă $\alpha = \pi$, atunci $v_a = |v_1 - v_2|$, barca se va putea deplasa împotriva curentului numai dacă $v_1 > v_2$.

b. Dacă notăm cu β unghiul pe care îl face viteza absolută cu malul, atunci, $v_1 \sin \alpha = v_a \sin \beta$, de unde

$$\sin \beta = \frac{v_1 \sin \alpha}{v_a}, \tag{2}$$

sau, ținînd seama de relația (1)

$$\sin \beta = \frac{v_1 \sin \alpha}{(v_1^2 + v_2^2 + 2v_1v_2 \cos \alpha)^{1/2}}. \tag{3}$$

Pentru ca barca să ajungă pe malul opus, perpendicular pe rîu, trebuie ca $\beta = \frac{\pi}{2}$, deci $\sin \beta = 1$ și din relația (3) obținem:

$$v_1 \sin \alpha = (v_1^2 + v_2^2 + 2\, v_1v_2 \cos \alpha)^{1/2}, \tag{4}$$

de unde

$$\cos \alpha = -\frac{v_2}{v_1} \quad \text{și} \quad v_a = (v_1^2 - v_2^2)^{1/2}. \tag{5}$$

Din relația (5) rezultă că barca poate traversa rîul, perpendicular pe mal, numai dacă $v_1 > v_2$.

c. Timpul cît barca traversează rîul este:

$$t = \frac{d}{\sin \beta} \cdot \frac{1}{v_a}$$

sau

$$t = \frac{d}{v_1 \sin \alpha}. \tag{6}$$

Timpul t, din relația (6), este minim cînd sin α este maxim, deci pentru $\alpha = \frac{\pi}{2}$. În acest caz, rezultă că $v_a = (v_1^2 + v_2^2)^{1/2}$ sau,

$$\sin \beta = \frac{v_1}{v_a}. \tag{7}$$

1.7.2. Viteza relativă a punctului material este $v_r = v$, iar viteza de transport este egală cu viteza de rotație a discului, adică $v_t = \omega R$. Rezultă viteza absolută a punctului material:

$$v_a = |\omega R - v|. \tag{1}$$

Accelerația relativă a punctului material are componentele: $a_{rt} = \dot{v} = 0$ și $a_{rn} = \frac{v^2}{R}$, iar accelerația de transport: $a_{tt} = \dot{\omega} R = 0$ (ω = constant), $a_{tn} = \omega^2 R$.

Accelerația Coriolis este, prin definiția $\vec{a}_c = 2\vec{\omega} \times \vec{v}_r$, iar în modul, $a_c = 2\omega v \sin \frac{\pi}{2} = 2\,\omega v$.

Accelerația absolută a punctului material, ținînd seama de accelerațiile de mai sus și de legea de compunere (1.13), este:

$$|\vec{a}_a| = |a_{rn} + a_{tn} - a_c| = |\frac{v^2}{R} + \omega^2 R - 2\omega v|. \tag{2}$$

Vitezele și accelerațiile sînt reprezentate în figura 1.7.2 R.

1.7.3. Vitezele și accelerațiile sînt prezentate în figura 1.7.3 R. În punctul O, ca și în punctele A și B, vitezele relative ale punctului material sînt egale:

$$|\vec{v}_{rO}| = |\vec{v}_{rA}| = |\vec{v}_{rB}| = 2\omega R/2 = \omega R. \tag{1}$$

Vitezele de transport sînt determinate de rotația discului:

$$v_{tO} = 0, \quad v_{tA} = \omega R \frac{\sqrt{2}}{2}, \quad v_{tB} = \omega R. \tag{2}$$

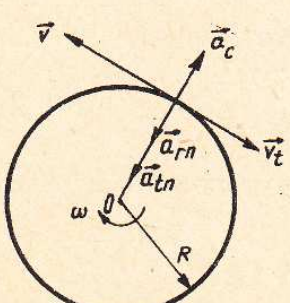


Fig. 1.7.2.R

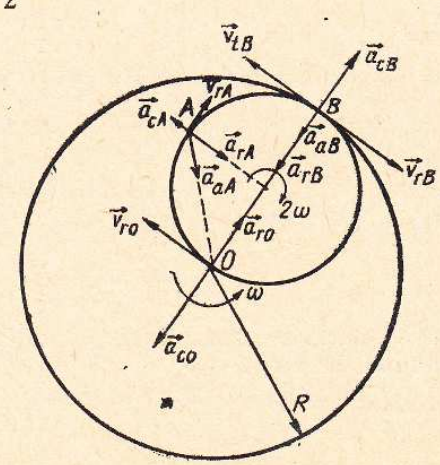


Fig. 1.7.3R

Vitezele absolute ale punctului material se obțin din legea de compunere (1.12):

$$v_{aO} = \omega R,$$

$$v_{aA} = (v_{rA}^2 + v_{tA}^2 + 2v_{rA}v_{tA}\cos 135°)^{1/2} = \frac{\sqrt{2}}{2}\omega R, \tag{3}$$

$v_{aB} = 0$ (deoarece viteza relativă și viteza de transport au sensuri diferite în punctul B, vezi figura 1.7.3 R).

Acceleraţiile relative ale punctului material au numai componente normale, deoarece viteza unghiulară este constantă, deci:

$$|\vec{a}_{rnO}| = |\vec{a}_{rnA}| = |\vec{a}_{rnB}| = (2\omega)^2\frac{R}{2} = 2\omega^2 R. \tag{4}$$

Și acceleraţiile de transport au numai componente normale, deoarece și discul se rotește cu viteza unghiulară constantă. Deci:

$$a_{tO} = 0,\ a_{tnA} = \omega^2 R\frac{\sqrt{2}}{2},\ \ a_{tnB} = \omega^2 R. \tag{5}$$

Acceleraţiile Coriolis se calculează din relaţia $\vec{a}_c = 2\vec{\omega}\times\vec{v}_r$ și cum vectorii $\vec{\omega}$ și $\vec{v}_r$ au același modul în punctele O, A și B, rezultă:

$$|\vec{a}_{cO}| = |\vec{a}_{cA}| = |\vec{a}_{cB}| = 2\omega^2 R. \tag{6}$$

Compunînd acceleraţiile după relaţia (1.14), obţinem acceleraţiile absolute ale punctului material:

$$a_{aO} = 0,\ a_{aA} = \frac{\sqrt{2}}{2}\omega^2 R,\ a_{aB} = \omega^2 R. \tag{7}$$

1.7.4. $$v = \sqrt{(v_{rxy} + v_t)^2 + v_{rz}^2} = 25{,}5\ \text{m/s}. \tag{1}$$

$$a = a_t + a_r + a_C = 12 + 12\pi^2 + 24\pi \simeq 206{,}5\ \text{m/s}^2 \tag{2}$$

în care

$$\vec{a}_C = 2\vec{\omega}_t\times\vec{v}_r.$$

Dacă ω_t își schimbă semnul, atunci:

$$v = \sqrt{(v_{rxy} - v_t)^2 + v_{rz}^2} = 13{,}2\,\text{m/s}, \tag{3}$$

$$a = a_t + a_r - a_C = 55{,}5\ \text{m/s}^2. \tag{4}$$

1.7.5. $$v_a = v_t + v_r = R\cos 60°\ \omega_t + v_r = 242\ \text{m/s}, \tag{1}$$

$$a_a = a_t + a_r + a_C = 0{,}017\ \text{m/s}^2 + 1{,}56\cdot 10^{-5}\ \text{m/s}^2 + 1{,}26\,\text{m/s}^2. \tag{2}$$

În celălalt caz, relaţia (1) rămîne aceeași, iar

$$a_r = \frac{v_r^2}{R\cos 60°} = 3{,}12\cdot 10^{-5}\ \text{m/s}^2,$$

$$a_C = 2\omega_t v_r \sin 90° = 1{,}46\cdot 10^{-3}\ \text{m/s}^2.$$

Capitolul 2

DINAMICA PUNCTULUI MATERIAL

2.1. Determinarea forțelor dacă este cunoscută mișcarea punctului material

2.1.1. Ecuația de mișcare este $\vec{F} = m\vec{a}$. Într-un sistem de referință fix Oxy, legat de pământ, obținem: $F_x = ma_x$, $F_y = ma_y$, unde $a_x = \dfrac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2} = \ddot{x}$, $a_y = \dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2} = \ddot{y}$. Folosind ecuațiile parametrice obținem: $a_x = a_y = 0$. Prin urmare, $F_x = F_y = 0$, adică $F = 0$.

2.1.2. Ecuația de mișcare este $\vec{F} = m\vec{a}$. Față de reperul fix Oxy, ecuația de mișcare se scrie: $F_x = ma_x$ și $F_y = ma_y$. Deoarece $v_y = v_0 = \text{const.}$, $a_y = 0$ și $y = v_0 t$. Înlocuind pe y în ecuația curbei obținem $x = \sqrt{\dfrac{v_0}{a}t - \dfrac{b}{a}}$. Prin derivare obținem:

$$a_x = \ddot{x} = -\frac{v_0^2}{4a^2\left(\dfrac{v_0}{a}t - \dfrac{b}{a}\right)^{3/2}}.$$

Forța $\vec{F}$ are componentele $F_y = 0$ și

$$F_x = ma_x = -\frac{mv_0^2}{4a^2\left(\dfrac{v_0}{a}t - \dfrac{b}{a}\right)^{3/2}}.$$

2.1.3. Deoarece $a_x = 0$, avem (v. fig. 2.1.3 R) $x = v_0 t$. Din ecuația curbei obținem $y = \dfrac{B}{A}\sqrt{A^2 - v_0^2t^2}$. Prin derivări succesive se obține

$$\dot{y} = -\frac{v_0^2 Bt}{A\sqrt{A^2 - v_0^2t^2}} \quad \text{și} \quad a_y = \ddot{y} = -\frac{v_0^2B^4}{A^2y^3}.$$

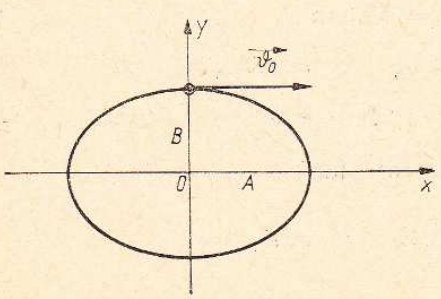


Fig. 2.1.3 R

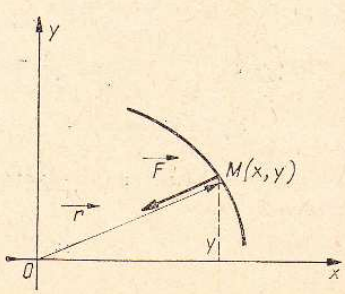


Fig. 2.1.4 R

Deci, $F_x = 0$ și

$$F_y = ma_y = -\frac{mv_0^2 B^4}{A^2 y^3}.$$

2.1.4. Conform figurii 2.1.4R, componentele forței $\vec{F}$ după axele Ox și Oy sînt $F_x = ma_x = m\ddot{x}$ și $F_y = ma_y = m\ddot{y}$. Sau $F_x = -mk^2x$ și $F_y = -mk^2y$. Modulul forței este $F = \sqrt{F_x^2 + F_y^2} = mk^2\sqrt{x^2 + y^2} = mk^2r$, unde $\vec{r}$ este vectorul de poziție al punctului material. Direcția forței $\vec{F}$ se determină cu ajutorul cosinușilor directori:

$$\cos\widehat{(x, \vec{F})} = \frac{F_x}{F} = -\frac{x}{r} \text{ și } \cos\widehat{(y, \vec{F})} = \frac{F_y}{F} = -\frac{y}{r}.$$

Dar $\frac{x}{r}$ și y/r determină unghiurile pe care le face raza vectoare $\vec{r}$ cu axele Ox și Oy. Aceasta înseamnă că și forța $\vec{F}$ are direcția razei vectoare $\vec{r}$ și este îndreptată spre centrul O. Valoarea forței $\vec{F}$ este $F = k^2mr$ și se numește forță centrală de atracție.

2.1.5. *a)* În acest caz, $\rho = \rho_0$, $\varphi = \varphi_0 + \dot{\varphi}_0 t$, $z = z_0 + \dot{z}_0 t$. Eliminînd timpul din ultimele două expresii obținem ecuația traiectoriei:

$$\rho = \rho_0, \quad \frac{\varphi - \varphi_0}{\dot{\varphi}_0} = \frac{z - z_0}{\dot{z}_0}.$$

Expresiile razei vectoare $\vec{r}$, a vitezei $\vec{v}$ și a accelerației $\vec{a}$ în coordonate cilindrice sînt:

$$\vec{r} = \rho\vec{n}_\rho + z\vec{n}_z, \quad \vec{v} = \dot{\rho}\vec{n}_\rho + \rho\dot{\varphi}\vec{n}_\varphi + \dot{z}\vec{n}_z,$$

$$\vec{a} = (\ddot{\rho} - \rho\dot{\varphi}^2)\vec{n}_\rho + \frac{1}{\rho}\left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\rho^2\dot{\varphi})\right]\vec{n}_\varphi + \ddot{z}\vec{n}_z.$$

În cazul nostru obținem:

$$\vec{r} = \rho_0\vec{n}_\rho + (z_0 + \dot{z}_0 t)\vec{n}_z, \quad \vec{v} = \rho_0\dot{\varphi}_0\vec{n}_\varphi + \dot{z}_0\vec{n}_z, \quad a = -\rho_0\dot{\varphi}_0^2\vec{n}_\rho.$$

Se observă că punctul material se mișcă pe o curbă elicoidală (elice). Pasul elicei este

$$h = v_z T = \dot{z}_0 \frac{2\pi}{\dot{\varphi}_0}.$$

Mișcarea pe curbă se face cu viteză constantă:

$$v = \sqrt{\rho_0^2\dot{\varphi}_0^2 + \dot{z}_0^2}.$$

Forța $\vec{F}$ o obținem din ecuația de mișcare $\vec{F} = m\vec{a} = -m\rho_0\dot{\varphi}_0^2\vec{n}_\rho$. Se vede că forța este constantă și îndreptată mereu spre axa cilindrului și perpendiculară pe ea (fig. 2.1.5 R, *a*).

b) În mod analog cu *a)* obținem:

$$\varphi = \varphi_0, \quad \frac{\rho - \rho_0}{\dot{\rho}_0} = \frac{z - z_0}{\dot{z}_0}$$

și

$$\vec{r} = (\dot{\rho}_0 t + \rho_0)\,\vec{n}_\rho + (\dot{z}_0 t + z_0)\,\vec{n}_z,$$

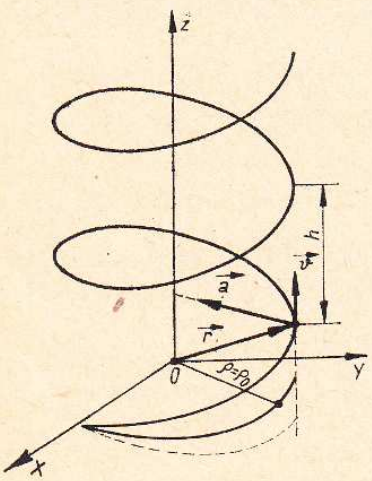
$$\vec{v} = \dot{\rho}_0 \vec{n}_\rho + \dot{z}_0 \vec{n}_z,\ \vec{a} = 0.$$

Se observă că punctul material se mișcă pe o dreaptă avînd viteza v constantă (fig. 2.1.5 R, *b*).

c) Dacă $\dot{z}_0 = 0$ și considerăm $\rho_0 = 0$, $\varphi_0 = 0$, $z_0 = 0$, obținem:

$$\vec{r} = \dot{\rho}_0 t \vec{n}_\rho,\ \vec{v} = \dot{\rho}_0 \vec{n}_\rho + \dot{\rho}_0 \dot{\varphi}_0 t \vec{n}_\varphi,$$

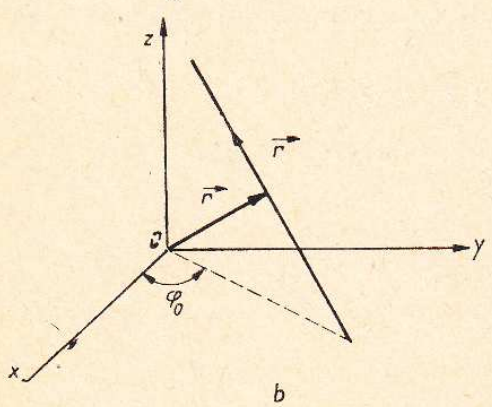
$$a = -\dot{\rho}_0 \dot{\varphi}_0^2 t \vec{n}_\rho + 2\dot{\rho}_0 \dot{\varphi}_0 \vec{n}_\varphi.$$



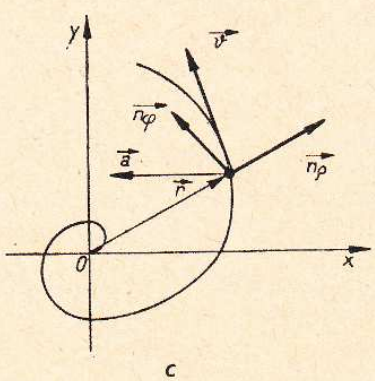
a

Eliminînd timpul din funcțiile $\rho = \dot{\rho}_0 t$, $\varphi = \dot{\varphi}_0 t$, obținem ecuația traiectoriei care este $\rho = \frac{\dot{\rho}_0}{\dot{\varphi}_0}\varphi$, adică o spirală arhimedică în planul xOy (fig. 2.1.5R, *c*). Forța $\vec{F}$ ce acționează asupra corpului are direcția și sensul lui $\vec{a}$, iar modulul

$$F = m\sqrt{\dot{\rho}_0^2 \dot{\varphi}_0^4 t^2 + 4\dot{\rho}_0^2 \dot{\varphi}_0^2}.$$



b



c

Fig. 2.1.5 R

2.1.6. Raportăm mișcarea la un sistem rectangular Oxy. Pentru viteză avem:

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = \text{const. sau } v^2 = \dot{x}^2 + \dot{y}^2 = \text{const.}$$

Din ecuația traiectoriei obținem : $\dot{x}y + x\dot{y} = 0$. Componentele vitezei după cele două axe sînt:

$$\dot{x} = -\frac{vx}{\sqrt{x^2 + y^2}},\ \dot{y} = \frac{vy}{\sqrt{x^2 + y^2}}.$$

Componentele accelerației au valoarea:

$$a_x = \ddot{x} = \frac{2v^2xy^2}{(x^2+y^2)^2}, \quad a_y = \ddot{y} = \frac{2v^2x^2y}{(x^2+y^2)^2}.$$

Accelerația punctului va fi:

$$a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2} = \sqrt{\frac{4v^4x^2y^2(x^2+y^2)}{(x^2+y^2)^4}} = \frac{2v^2k^2}{(x^2+y^2)^{3/2}}.$$

Deci $\vec{F} = \frac{2v^2xy^2m}{(x^2+y^2)^2}\vec{i} + \frac{2v^2x^2ym}{(x^2+y^2)^2}\vec{j}$, unde $\vec{i}$ și $\vec{j}$ sînt versorii axelor Ox, respectiv Oy.

2.1.7. Alegem sistemul de axe Oxy conform figurii 2.1.7. R. Ecuația de mișcare este $\vec{G} + \vec{R} + \vec{F}_f = m\vec{a}$. Proiecțiile ei pe cele două axe:

$$G \sin \alpha - F_f = ma_x,$$

$$R - G \cos \alpha = ma_y,$$

de unde

$$F_f = G \sin \alpha - 2Agm = G(\sin \alpha - 2A).$$

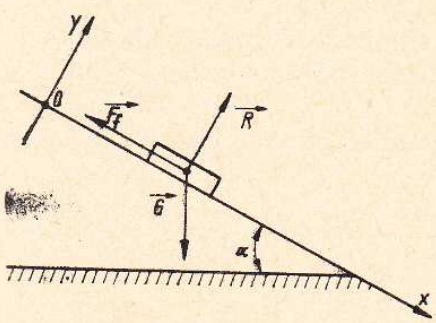


Fig. 2.1.7 R

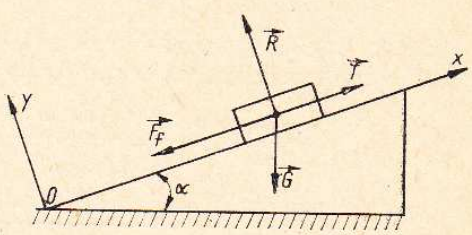


Fig. 2.1.8 R

2.1.8. *a)* Alegem sistemul de axe ca în figura 2.1.8. R. Ecuația mișcării este $\vec{T} + \vec{F}_f + \vec{G} + \vec{R} = m\vec{a}$ sau în proiecții pe Ox și Oy:

$$T - F_f - G \sin \alpha = ma_x,$$

$$R - G \cos \alpha = ma_y,$$

de unde pentru tensiunea din cablu avem expresia:

$$T = mg(\sin \alpha + \mu \cos \alpha) + m\frac{v}{\tau}.$$

b) Cînd mișcarea este uniformă $a_x = 0$ și obținem

$$T' = mg(\sin \alpha + \mu \cos \alpha).$$

2.1.9. Forțele ce intervin sînt indicate în figura 2.1.9R. Ecuația de mișcare $\vec{G} + \vec{T} + \vec{F}_f = m\vec{a}$ în proiecție pe axa Ox se scrie: $G - F_f - T = ma_x$ și

$$T = G - 0{,}2G - \frac{G}{g} \cdot 0{,}4g = 320 \text{ N}.$$

2.1.10. Din figura 2.1.10R se vede că ecuația de mișcare a bărcii are forma $\vec{R} + \vec{G} + \vec{N} = m\vec{a}$.

Deoarece $y = 0$ și $a_y = 0$, avem $R_x = ma_x = m\ddot{x}$ sau $R_x = -Av_x$.

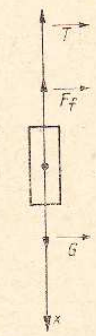


Fig. 2.1.9 R

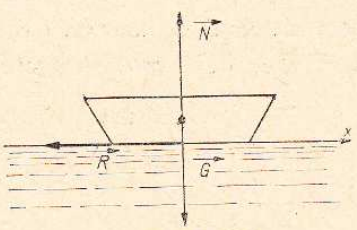


Fig. 2.1.10 R

2.2. Determinarea mișcării punctului material dacă se cunosc forțele ce acționează asupra lui

2.2.1. Legăm sistemul de referință de pămînt ca în figura 2.2.1R. Componentele accelerației pe axele Ox și Oy sînt:

$$a_x = \frac{F_1 \cos \alpha_1 + F_2 \cos \alpha_2}{m} = -0{,}25 \text{ m/s}^2,$$

$$a_y = \frac{F_1 \sin \alpha_1 + F_2 \sin \alpha_2}{m} \simeq 3 \text{ m/s}^2,$$

$$a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2} = 3{,}1 \text{ m/s}^2.$$

Deoarece $\vec{a} = \text{const}$, ecuația vectorială a vitezei va fi:

$$\vec{v} = \vec{v}_o + \vec{a}t$$

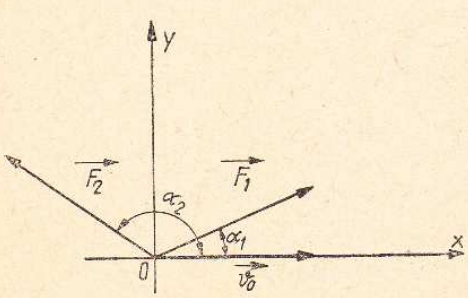


Fig. 2.2.1. R

sau

$$v_x = v_{0x} + a_x t, \; v_y = v_{0y} + a_y t.$$

Deoarece $v_{0x} = v_0$ și $v_{0y} = 0$, avem

$$v_x = v_0 + a_x t, \; v_y = a_y t.$$

Folosind valorile numerice pentru a_x și a_y, se obține: $v_x = 17{,}5$ m/s, $v_y = 30$ m/s.

Deci $v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} \simeq 34{,}8$ m/s. Viteza $\vec{v}$ la momentul t face unghiul α cu $\vec{v}_0$, unghi ce se obține din

$$\alpha = \operatorname{arctg} \frac{v_y}{v_x} = 59°40'.$$

Pentru spațiu avem:

$$\vec{s} = \vec{v}_0 t + \frac{\vec{a} t^2}{2}$$

sau $x = v_{0x} t + \frac{a_x t^2}{2}$ și $y = v_{0y} t + \frac{a_y t^2}{2}$. Folosind condițiile inițiale, $v_{0x} = v_0$, $v_{0y} = 0$ și datele numerice se obține: $x = 187{,}5$ m, $y \simeq 150$ m.

2.2.2. *a)* Ecuația de mișcare pentru $m = \text{const.}$ este

$$\vec{F} + \vec{G} + \vec{F}_f + \vec{R} = m \frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t}$$

sau scriind proiecțiile pe axele de coordonate,

$$F - F_f = m \frac{\mathrm{d}v_x}{\mathrm{d}t} \text{ și } R - G = m \frac{\mathrm{d}v_y}{\mathrm{d}t}.$$

Dar $F_f = \mu G$ și $R = G$; astfel avem:

$$F - \mu m g = m \frac{\mathrm{d}v_x}{\mathrm{d}t} \text{ și } 0 = m \frac{\mathrm{d}v_y}{\mathrm{d}t}.$$

Din a doua ecuație rezultă $v_y = \text{const.}$ Dar cum $v_{y0} = 0$ (fig. 2.2.2R) rezultă că $v_y = v_{y0} = 0$.

Viteza și spațiul pe axa Ox se obțin simplu: $\mathrm{d}v_x = \left(\frac{F}{m} - \mu g\right) \mathrm{d}t$ sau, integrând, $v_x = \left(\frac{F}{m} - \mu g\right)(t + c)$. La momentul $t = 0$ avem $v_{x0} = v_0 = \left(\frac{F}{m} - \mu g\right) c$, de unde $c = \frac{v_0}{\frac{F}{m} - \mu g}$. Deci ecuația vitezei va fi

$$v_x = \left(\frac{F}{m} - \mu g\right)\left(t + \frac{v_0}{F/m - \mu g}\right) = v_0 + t\left(\frac{F}{m} - \mu g\right).$$

Pentru a-l afla pe x avem: $v_x = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = v_0 + t\left(\frac{F}{m} - \mu g\right)$ care prin integrare dă legea spațiului

$$x = \int_0^t \left[v_0 + \left(\frac{F}{m} - \mu g\right) t\right] \mathrm{d}t = v_0 t + \frac{1}{2}\left(\frac{F}{m} - \mu g\right) t^2.$$

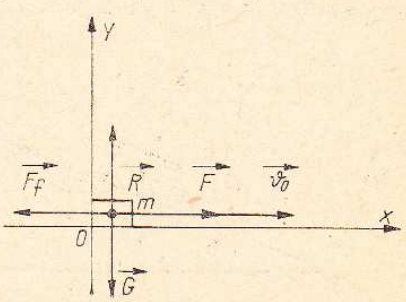


Fig. 2.2.2 R

b) Scriind ecuația de mișcare după componente avem:

$$F\cos\alpha - F_f' = m\frac{dv_x}{dt} \quad \text{și} \quad R' + F\sin\alpha - G = m\frac{dv_y}{dt},$$

unde

$$F_f' = \mu(G - F\sin\alpha) \text{ și } R' + F\sin\alpha - G = 0.$$

Și în acest caz, $v_y = v_{y0} = 0$. Pentru v_x și x obținem:

$$v_x = v_0 + t\left[\frac{F}{m}(\cos\alpha + \mu\sin\alpha) - \mu g\right],$$

$$x = v_0 t + \frac{1}{2}\left[\frac{F}{m}(\cos\alpha + \mu\sin\alpha) - \mu g\right]t^2.$$

2.2.3. *a*) La urcare, componentele accelerației sînt (corpul se mișcă pe plan, $a_y = 0$):

$$a_x = \frac{-G\sin\alpha - \mu G\cos\alpha}{m} = -g(\sin\alpha + \mu\cos\alpha),$$

$$0 = \frac{R - G\cos\alpha}{m}.$$

Dar $m \neq 0$, deci $R = G\cos\alpha$, adică forța de reacție R este egală cu apăsarea corpului pe plan, $a_x < 0$, deci mișcarea este încetinită.

Timpul de urcare, respectiv, spațiul parcurs pînă la oprire sînt:

$$t_u = -\frac{v_{0x}}{a_x} = -\frac{v_0}{a_x}, \quad s = -\frac{v_{0x}^2}{2a_x} = -\frac{v_0^2}{2a_x}.$$

La coborîre, componentele accelerației sînt:

$$a_x' = \frac{G\sin\alpha - \mu G\cos\alpha}{m} = g(\sin\alpha - \mu\cos\alpha),$$

$$0 = \frac{R - G\cos\alpha}{m}.$$

Timpul în care corpul parcurge spațiul s, fără viteză inițială, este $t_c = \sqrt{\frac{2s}{a_x'}}$.

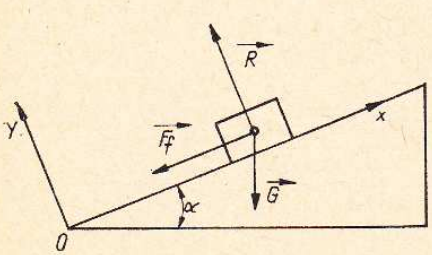


Fig. 2.2.3 R

Raportul căutat va fi $\frac{t_u}{t_c} = -\frac{v_0}{a_x}\sqrt{\frac{a_x'}{2s}}$.

$\frac{t_u}{t_c} = \frac{\sqrt{\sin^2\alpha - \mu^2\cos^2\alpha}}{\sin\alpha + \mu\cos\alpha} = 0{,}816$, deci $t_u < t_c$.

b) Viteza finală va fi:

$$v_f = \sqrt{2a_x's} = v_0\sqrt{\frac{\sin\alpha - \mu\cos\alpha}{\sin\alpha + \mu\cos\alpha}}$$

și

$\frac{v_0}{v_f} = \sqrt{\frac{\sin\alpha + \mu\cos\alpha}{\sin\alpha - \mu\cos\alpha}} = \sqrt{1{,}225}$, adică viteza finală este mai mică decît viteza inițială.

2.2.4. Notînd cu $\vec{r}$ vectorul de poziție al punctului material, ecuația de mișcare ia forma: $\vec{G} = m\frac{d^2\vec{r}}{dt^2}$ sau $\frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = \vec{g}$. Dependența vitezei corpului $\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt}$ și a vectorului de poziție $\vec{r}(t)$ de timp se obține prin integrare succesivă de două ori a ecuației de mișcare:

$$\vec{v}(t) = \frac{d\vec{r}}{dt} = \int d\left(\frac{d\vec{r}}{dt}\right) = \int \vec{g}\,dt = \vec{g}t + \vec{C}_1,\ \vec{r}(t) = \int d\vec{r} = \int \vec{v}(t)\,dt =$$

$$= \int (\vec{g}t + \vec{C}_1)\,dt = \vec{g}\frac{t^2}{2} + \vec{C}_1 t + \vec{C}_2,$$

unde $\vec{C}_1$ și $\vec{C}_2$ sînt constante de integrare care se obțin din condițiile inițiale: $\vec{C}_2 = 0$ și $\vec{C}_1 = \vec{v}_0$. Astfel se obține: $\vec{r}(t) = \vec{v}_0 t + \vec{g}\frac{t^2}{2}$ și $\vec{v}(t) = \vec{v}_0 + \vec{g}t$. Componentele vectorului de poziție pe axele de coordonate sînt:

$$r_x(t) = x(t) = v_{0x}t + \frac{g_x t^2}{2} = v_0\cos\alpha \cdot t \quad (g_x = 0,\ g_y = -g).$$

$$r_y(t) = y(t) = v_{0y}t + \frac{g_y t^2}{2} = v_0\sin\alpha \cdot t - \frac{gt^2}{2}$$

care reprezintă ecuațiile parametrice ale traiectoriei. Ecuația traiectoriei este parabola $y = x\,\mathrm{tg}\,\alpha - \frac{gx^2}{2v_0^2\cos^2\alpha}$.

a) Coordonatele punctului A de intersecție a dreptei cu traiectoria sînt:

$$x_A = \frac{2v_0^2}{g}(\mathrm{tg}\,\alpha - \mathrm{tg}\,\beta)\cos^2\alpha,\ y_A = \frac{2v_0^2}{g}(\mathrm{tg}\,\alpha - \mathrm{tg}\,\beta)\,\mathrm{tg}\,\beta\cos^2\alpha.$$

Distanța OA este:

$$OA = \frac{x_A}{\cos\beta} = 2\frac{v_0^2}{g\cos\beta}\left(\frac{1}{2}\sin 2\alpha - \mathrm{tg}\,\beta\cos^2\alpha\right).$$

b) Timpul necesar parcurgerii distanței OA este:

$$t_A = \frac{x_A}{v_0\cos\alpha} = \frac{2v_0}{g}\frac{\sin(\alpha - \beta)}{\cos\beta}.$$

c) Distanța OA este maximă cînd $\frac{dOA}{d\alpha} = 0$, adică

$$\cos 2\alpha - \mathrm{tg}\,\beta \cdot 2\cos\alpha(-\sin\alpha) = 0,$$

de unde

$$\mathrm{ctg}\,2\alpha = -\mathrm{tg}\,\beta.$$

2.2.5. Considerînd trenul un punct material asupra lui acționează forțele (fig. 2.2.5R): forța de greutate a trenului $\vec{G}_{tren} = \vec{G} + n\vec{P}$, unde n — număr de vagoane, forța de frecare $F_f = \mu_1 G_{tren}$, forța de tracțiune $f = \mu_2 G$.

Ecuația de mișcare va fi $\vec{f} + \vec{F}_f + \vec{R} + \vec{G}_{tren} = 0$, sau în proiecții

$$\mu_2 G \cos\alpha - \mu_1 G_{tren} \cos\alpha - G_{tren} \sin\alpha = 0,$$

$$R - G_{tren} \cos\alpha = 0,$$

de unde

$$n = \frac{3[(\mu_2 - \mu_1)\cos\alpha - \sin\alpha]}{\sin\alpha + \mu_1 \cos\alpha} = 9 \text{ vagoane.}$$

În cazul în care mișcarea ar fi orizontală ($\alpha = 0$), numărul vagoanelor ar fi:

$$n' = \frac{3(\mu_2 - \mu_1)}{\mu_1} = 297.$$

2.2.6. Ecuația de mișcare va fi $\vec{G} + \vec{R} + \vec{F}_f = m\vec{a}$, care în proiecții după direcția normalei și tangentei este

$$G\cos\varphi - F_f = ma_t, \quad R - G\sin\varphi = ma_n,$$

unde a_t și a_n sînt componentele accelerației $\vec{a}$. Cunoscînd că $a_t = \frac{dv}{dt} = r\ddot{\varphi}$ și $a_n = \frac{v^2}{r} = r\dot{\varphi}^2$, unde r — raza cercului și φ — unghiul la centru ce determină poziția punctului, se obține:

$$mr\ddot{\varphi} = mg\sin\varphi - \mu R$$

$$-mr\dot{\varphi}^2 = mg\sin\varphi - R.$$

După eliminarea lui R, obținem ecuația diferențială:

$$r\ddot{\varphi} = g\cos\varphi - \mu(r\dot{\varphi}^2 + g\sin\varphi) \qquad (1)$$

care nu conține explicit pe t. Ecuația poate fi integrată făcînd schimbarea de variabilă

$$y = (\dot{\varphi})^2 = \left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2;$$

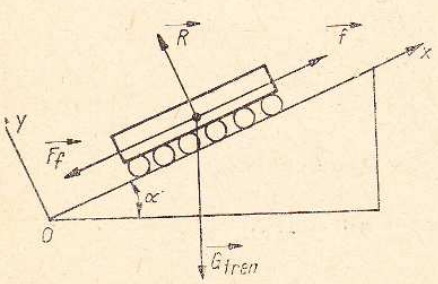


Fig. 2.2.5 R

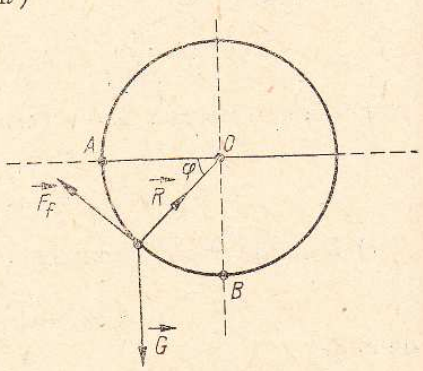


Fig. 2.2.6 R

avem $\frac{dy}{dt} = \frac{dy}{d\varphi}\frac{d\varphi}{dt} = 2\dot{\varphi}\frac{d\dot{\varphi}}{dt}$, de unde $2\ddot{\varphi} = \frac{dy}{d\varphi}$, atunci (1) devine:

$$\frac{r}{2}\frac{dy}{d\varphi} + \mu r y = g(\cos\varphi - \mu\sin\varphi). \tag{2}$$

Soluția ecuației omogene ($g = 0$) este $y = Ae^{-2\mu\varphi}$, unde $A = \text{const.}$ O soluție a ecuației cu membru drept se obține considerînd $A = A(\varphi)$. Introducînd $y = A(\varphi)e^{-2\mu\varphi}$ în (2) se obține

$$\frac{dA}{d\varphi} = \frac{2g}{r}e^{2\mu\varphi}(\cos\varphi - \mu\sin\varphi),$$

de unde

$$A = \frac{2g}{r}e^{2\mu\varphi}\frac{3\mu\cos\varphi + (1-2\mu^2)\sin\varphi}{1+4\mu^2} + C.$$

Revenind la φ și t se obține ecuația diferențială

$$\dot{\varphi}^2 = \frac{2g}{h}\frac{3\mu\cos\varphi + (1-2\mu^2)\sin\varphi}{1+4\mu^2} + Ce^{-2\mu\varphi}.$$

Problema se reduce în continuare la determinarea constantelor C și μ (coeficientul de frecare) pentru care $\dot{\varphi}$ este zero (viteză unghiulară zero). Aceasta se întîmplă cînd $\varphi = 0$ și $\varphi = \frac{\pi}{2}$.

Prima condiție dă pentru C

$$C = -\frac{g}{r}\frac{6\mu}{1+4\mu^2},$$

a doua

$$\frac{1-2\mu^2}{3} - \mu e^{-\pi\mu} = 0. \tag{4}$$

Din ecuația (4) se determină valoarea căutată: $\mu \simeq 0{,}6$.

2.2.7. Ecuația de mișcare este (fig. 2.2.7R):

$$\vec{F} + \vec{G} + \vec{R} = m\vec{a}$$

sau în proiecție după axa Ox; $F_x = m\ddot{x}$

sau $\ddot{x} = \frac{A}{m}\sin kt$.

Separînd variabilele, obținem $d\dot{x} = \frac{A}{m}\sin kt\,dt$, care prin integrare dă

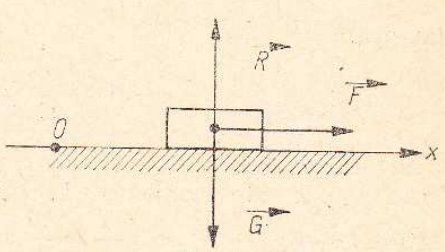


Fig. 2.2.7 R

$$\dot{x} = -\frac{A}{mk}\cos kt + C_1. \tag{1}$$

Din condițiile inițiale ($t = 0, v = \dot{x} = 0$) obținem $C_1 = \frac{A}{mk}$. Expresia vitezei va fi:

$$v = \dot{x} = \frac{A}{mk}(1 - \cos kt). \tag{2}$$

Separînd variabilele în expresia vitezei, integrînd și folosind condițiile inițiale ($t = 0$, $x = 0$) se obține ecuația spațiului parcurs de corp, care are expresia

$$x = \frac{A}{mk}\left(t - \frac{1}{k}\sin kt\right). \tag{3}$$

Din (3) se vede că peste mișcarea uniformă, în direcția pozitivă a axei Ox, cu viteza $\frac{A}{mk}$, se suprapune o mișcare oscilatorie de amplitudine $\frac{A}{mk^2}$ și de perioadă $T = \frac{2\pi}{k}$. După cum se observă, mișcarea uniformă este rezultatul condițiilor inițiale. Valoarea lui $C_1 = \frac{A}{mk}$, care are sensul unei viteze inițiale, în (2) este determinată de condițiile inițiale. Pot fi alese condiții inițiale astfel ca corpul să aibă numai mișcare oscilatorie. Pentru aceasta, constanta C_1 în (1) trebuie să fie zero. Din (1), punînd condiția ca la $t = 0$, $C_1 = 0$, obținem $\dot{x}_0 = v_0 = -\frac{A}{mk}$. Prin urmare, dacă la momentul inițial, corpului i se imprimă viteza v_0 în sensul negativ al axei Ox, de modul $\frac{A}{mk}$, ecuația spațiului este $x = -\frac{A}{mk^2}\cdot \sin kt$. Deci caracterul mișcării depinde de viteza inițială. Alegerea originii axei Ox nu influențează asupra caracterului mișcării.

2.2.8. Ecuația de mișcare este (fig. 2.2.8R)

$$\vec{F} + \vec{R} + \vec{F}_f = m\vec{a}$$

sau proiectată după axa Ox

$$F - F_f = ma_x = ma \quad (a_y = 0),$$

dar $F = kt$ și $F_f = nG$, deci $kt - nG = ma$ sau $\ddot{x} = \frac{kt}{m} - \frac{n}{m}G$, de unde prin integrare

$$v = \dot{x} = \frac{k}{2m}(t-\tau)^2 - \frac{n}{m}G(t-\tau). \tag{1}$$

t este timpul măsurat din momentul cînd începe să acționeze forța de tracțiune, τ este momentul la care începe mișcarea, determinat din relațiile $k\tau - F_f = 0$; $\tau = \frac{nG}{k} = \frac{20}{3}$ s. Integrînd relația (1) între aceleași limite, obținem:

$$x = \frac{k}{6m}(t-\tau)^3 - \frac{ng}{2}(t-\tau)^2.$$

Folosind datele numerice, avem

$$x = 0{,}05\left(t - \frac{20}{3}\right)^3 \frac{\text{m}}{\text{s}^3} - \left(t - \frac{20}{3}\right)^2 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}.$$

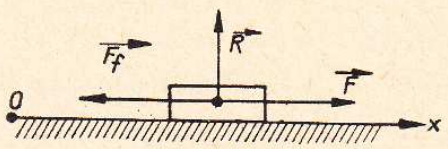


Fig. 2.2.8 R

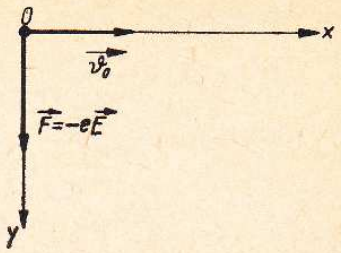


Fig. 2.2.9 R

2.2.9. Ecuația de mișcare va fi $\vec{F} = m\vec{a}$ sau după cele două axe, $F_x = 0 = m\ddot{x}$; $F_y = -eE = m\ddot{y}$ (fig. 2.2.9R).

Din prima ecuație avem $\dot{x} = \text{const} = v_0$ $(m \neq 0)$ și prin integrarea vitezei, $x = v_0 t + C_0$, dar la $t = 0$, $x = 0$, deci $C_0 = 0$ și $x = v_0 t$. Din a doua ecuație avem:

$$v_y = \dot{y} = \int \ddot{y}\, dt = -\int \frac{eA}{m} \cos kt\, dt = \frac{eA}{mk} \sin kt + C_1.$$

Din condițiile inițiale, $v_y = 0$ la $t = 0$, rezultă $C_1 = 0$. Pentru y avem:

$$y = \int v_y\, dt = -\frac{eA}{mk^2} \cos kt + C_2.$$

Din condițiile inițiale $y = 0$ la $t = 0$, avem $C_2 = \frac{eA}{mk^2}$. Deci

$$y = \frac{eA}{mk^2}(1 - \cos kt) \text{ sau } y = \frac{eA}{mk^2}\left(1 - \cos \frac{k}{v_0} x\right).$$

2.2.10. Notînd cu $\vec{G}$ greutatea corpului, cu $\vec{R}$ reacția planului și cu $\vec{F}_f$ forța de frecare, ecuația de mișcare este:

$$\vec{G} + \vec{R} + \vec{F}_f = m\vec{a}.$$

Alegem axa Ox după direcția mișcării, avînd originea în punctul în care se afla corpul la momentul inițial. Ecuația de mișcare proiectată pe această axă va fi $m\ddot{x} = F_x$, din enunț

$$F_x = -A\dot{x} - B\dot{x}^2,$$

deci

$$m\ddot{x} = -A\dot{x} - B\dot{x}^2. \tag{1}$$

Înlocuim în (1) pe $\ddot{x} = \frac{d\dot{x}}{dt}$ și separăm variabilele:

$$m \frac{d\dot{x}}{\dot{x}(A + B\dot{x})} = -dt. \tag{2}$$

Integrăm expresia (2), ținînd seama de relația,

$$\frac{1}{\dot{x}(A + B\dot{x})} = \frac{1}{A\dot{x}} - \frac{B}{A(A + B\dot{x})}$$

și obținem

$$\frac{m}{A}\ln\frac{\dot{x}}{A+B\dot{x}} = -t + C. \tag{3}$$

Constanta de integrare se determină din condițiile inițiale (la $t = 0$, $\dot{x} = v_0$): $C = \frac{m}{A}\ln\frac{v_0}{A+Bv_0}$. Exprimînd pe t din (3) și ținînd seama de valoarea lui C:

$$t = \frac{m}{A}\ln\frac{v_0(A+B\dot{x})}{(A+Bv_0)\dot{x}}. \tag{4}$$

Punînd condiția ca la momentul τ, viteza $v_x = \dot{x} = \frac{v_0}{n} = \frac{v_0}{3}$, obținem $\tau = \frac{m}{A}\ln\frac{3A+Bv_0}{A+Bv_0}$.

Pentru a determina pe x pornim de la ecuația (1). Înmulțim ambii membri cu dx. Ținînd seama că $\ddot{x}dx = \frac{d\dot{x}}{dt}dx = \dot{x}\,d\dot{x}$, avem, separînd variabilele, $m\frac{d\dot{x}}{A+B\dot{x}} = -dx$. Prin integrare obținem:

$$\frac{m}{B}\ln(A+B\dot{x}) = -x + C. \tag{5}$$

Punînd condițiile inițiale (la $t = 0$, $x = 0$ și $\dot{x} = v_0$) avem $C = \frac{m}{B}\ln(A+Bv_0)$. Astfel (5) devine:

$$x = \frac{m}{B}\ln\frac{A+Bv_0}{A+B\dot{x}}. \tag{6}$$

Pentru a obține spațiul parcurs în intervalul τ, punem condiția ca la acest moment, $x = s$ și $v_x = \dot{x} = \frac{v_0}{3}$, se obține:

$$s = \frac{m}{B}\ln\frac{3(A+Bv_0)}{3A+Bv_0}.$$

2.2.11. Alegem axa Ox după verticala locului, avînd originea O pe suprafața pămîntului. Asupra corpului acționează greutatea $\vec{G}$ și forța de rezistență $\vec{R}$. Ecuația mișcării este $\vec{G} + \vec{R} = m\vec{a}$. Pe axa Ox avem $-(g + k^2\dot{x}^2) = \ddot{x}$. După separarea variabilelor avem

$$\frac{\dot{x}\,d\dot{x}}{g+k^2\dot{x}^2} = -dx. \tag{1}$$

Ecuația (1) integrată, cu condițiile inițiale (la $t = 0$, $x = 0$ și $\dot{x} = v_0$) ne dă

$$x = \frac{1}{2k^2}\ln\frac{g+k^2v_0^2}{g+k^2\dot{x}^2}. \tag{2}$$

Pentru a-l afla pe H înlocuim în (2), $x = H$ și $\dot{x} = \frac{v_0}{2}$; se obține

$$H = \frac{1}{2k^2} \ln 4 \frac{g + k^2 v_0^2}{4g + k^2 v_0^2}.$$

2.2.12. Ecuația de mișcare va fi (fig. 2.2.12R):

$$m\ddot{\vec{r}} = \vec{G} + \vec{R}.$$

Proiecțiile ecuației de mișcare pe axele de coordonate sînt:

$$\ddot{x} = -k\dot{x}, \qquad (1)$$

$$\ddot{y} = -g - k\dot{y}. \qquad (2)$$

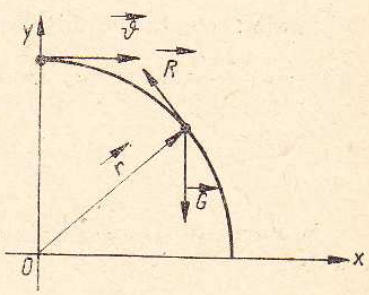


Fig. 2.2.12 R

Deoarece $\ddot{x} = \frac{\mathrm{d}\dot{x}}{\mathrm{d}t}$, din (1) avem după separarea variabilelor,

$$\frac{\mathrm{d}\dot{x}}{\dot{x}} = -k\,\mathrm{d}t.$$

Prin integrare obținem ecuația vitezei:

$$\dot{x} = v_0 e^{-kt}. \qquad (3)$$

Integrînd din nou rezultă:

$$x = \frac{v_0}{k}(1 - \mathrm{e}^{-kt}). \qquad (4)$$

Pentru a integra ecuația (2) procedăm la fel: $\ddot{y} = \frac{\mathrm{d}\dot{y}}{\mathrm{d}t}$ și $-\frac{\mathrm{d}\dot{y}}{k\dot{y} + g} = \mathrm{d}t$.

Prin integrare obținem:

$$\dot{y} = \frac{g}{k}\mathrm{e}^{-kt} - \frac{g}{k}. \qquad (5)$$

Integrînd pe (5) cu condițiile la $t = 0$, $y = h$, se obține:

$$y = h - \frac{g}{k}t + \frac{g}{k^2}(1 - \mathrm{e}^{-kt}). \qquad (6)$$

Ecuația traiectoriei se obține eliminînd pe t între (4) și (6):

$$y = h - \frac{g}{k^2} \ln \frac{v_0}{v_0 - kx} + \frac{gx}{kv_0}.$$

2.2.13. *a*) Conform figurii, ecuația de mișcare este $\vec{F} + \vec{R} + \vec{G} = m\vec{a}$ sau proiecția ei pe axa Ox

$$m\ddot{x} = F_x. \qquad (1)$$

Dar $F_x = k^2 mx$ și ecuația (1) devine:

$$\ddot{x} - k^2 x = 0. \qquad (2)$$

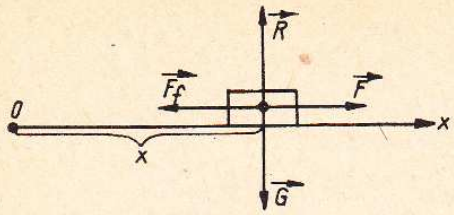


Fig. 2.2.13 R

Ecuația caracteristică are soluțiile $\lambda_{1,2} = \pm k$.
Soluția ecuației (2) este de forma:

$$x = C_1 e^{kt} + C_2 e^{-kt}. \qquad (3)$$

Deoarece avem două constante de integrare C_1 și C_2, mai avem nevoie de o ecuație pentru a le putea determina. Aceasta se obține derivînd soluția (3) în raport cu t; obținem:

$$\dot{x} = C_1 k e^{kt} - C_2 k e^{-kt}. \qquad (4)$$

Punînd condițiile inițiale (la $t = 0$, $x = d$ și $\dot{x} = 0$) se obține $C_1 = C_2 = \frac{d}{2}$. Cu aceste valori, (3) devine:

$$x = \frac{d}{2}(e^{kt} + e^{-kt}) = d \operatorname{ch} kt. \qquad (5)$$

b) Forța de frecare este $F_f = \mu G$. Proiecția ecuației de mișcare pe Ox va fi:

$$\ddot{x} - k^2 x = -\mu g. \qquad (6)$$

Relația (6) este o ecuație diferențială de ordinul II cu coeficienți constanți, neomogenă. Soluția generală va fi egală cu suma dintre soluția generală x_1 a ecuației omogene și soluția particulară x_2 a ecuației cu membrul drept:

$$x = x_1 + x_2. \qquad (7),$$

Soluția generală x_1 este dată de (3). Deoarece partea dreaptă a ecuației (6) este o constantă, căutăm soluția particulară tot sub forma unei constante, $x_2 = A$. Înlocuind pe x_2 în (6) se obține $x_2 = A = \frac{\mu g}{k^2}$. Conform cu (7), soluția generală va fi:

$$x = C_1 e^{kt} + C_2 e^{-kt} + \frac{\mu g}{k^2}. \qquad (8)$$

Coeficienții C_1 și C_2 se obțin din rezolvarea sistemului format din (8) și din derivata lui x în raport cu t, ținînd seama de condițiile inițiale; se obține $C_1 = C_2 = \frac{1}{2}\left(d - \frac{\mu g}{k^2}\right)$. Astfel, (8) devine:

$$x = \frac{1}{2}\left(d - \frac{\mu g}{k^2}\right)(e^{kt} + e^{-kt}) + \frac{\mu g}{k^2}$$

sau

$$x = \left(d - \frac{\mu g}{k^2}\right) \operatorname{ch} kt + \frac{\mu g}{k^2}.$$

2.2.14. Asupra corpului acționează forțele: $\vec{G}$ — greutatea, $\vec{R}$ — reacția planului orizontal și $\vec{F}$ — forța elastică. Ecuația de mișcare va fi $\vec{F} + \vec{R} + \vec{G} = m\vec{a}$. În proiecție pe axa Ox, ecuația devine

$$m\ddot{x} = -Ax - Bx^3. \qquad (1)$$

Deoarece $\ddot{x}\,dx = \dot{x}\,d\dot{x}$, ecuația (1) devine:

$$m\dot{x}\,d\dot{x} = -(Ax + Bx^3)\,dx. \tag{2}$$

integrăm (2) și obținem:

$$m\frac{\dot{x}^2}{2} = -\frac{Ax^2}{2} - \frac{Bx^4}{4} + C. \tag{3}$$

Din condițiile inițiale ($t = 0$, $x = 0$, $\dot{x} = v_0$) se obține $C = m\frac{v_0^2}{2}$. Deci (3) devine:

$$m\frac{\dot{x}^2}{2} - m\frac{v_0^2}{2} = -\frac{Ax^2}{2} - \frac{Bx^4}{4}. \tag{4}$$

Pentru a calcula deplasarea maximă, punem în (4) condiția $x = x_{max}$, $\dot{x} = 0$. Se obține ecuația:

$$x_{max}^4 + 2\frac{A}{B}x_{max}^2 - \frac{2m}{B}v_0^2 = 0$$

a cărei soluție este

$$x_{max} = \frac{1}{B}\sqrt{B(\sqrt{A^2 + 2mBv_0^2} - A)}.$$

2.2.15. Ecuația de mișcare a punctului este $\vec{F} + \vec{G} = m\ddot{\vec{r}}$ sau $\ddot{\vec{r}} = \vec{g} - k^2\vec{r}$ Proiecțiile ecuației de mișcare după axele Ox și Oy sînt:

$$\ddot{x} + k^2x = 0, \tag{1}$$

$$\ddot{y} + k^2y = -g. \tag{2}$$

Relația (1) este o ecuație diferențială liniară, omogenă de ordinul II cu coeficienți constanți. Ecuația caracteristică are soluțiile $\lambda_{1,2} = \pm ki$ ($i = \sqrt{-1}$). Deci, soluția generală a ecuației (1) este:

$$x = C_1 \cos kt + C_2 \sin kt. \tag{3}$$

Pentru determinarea lui C_1 și C_2 se rezolvă sistemul de ecuații format din (3) și derivata lui x în raport cu t cu condițiile inițiale (la $t = 0$, $x = a$ și $\dot{x} = 0$). Se obțin valorile $C_1 = a$, $C_2 = 0$. Deci (3) devine:

$$x = a \cos kt. \tag{4}$$

Soluția ecuației diferențiale neomogene (2) va fi:

$$y = y_1 + y_2, \tag{5}$$

unde y_1 — soluția generală a ecuației omogene corespunzătoare, y_2 — soluția particulară a ecuației neomogene. Procedînd ca în problema 2.13 și folosind condițiile inițiale (la $t = 0$, $y = -g/k^2$ și $\dot{y} = v_0$) se obține soluția:

$$y = \frac{v_0}{k}\sin kt - \frac{g}{k^2}. \tag{6}$$

Rezolvînd (4) cu (6) obținem ecuația traiectoriei:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{(y + g/k^2)^2}{\frac{v_0^2}{k^2}} = 1$$

care este o elipsă cu centrul în punctul $A(0, -g/k^2)$.

2.2.16. Ecuația de mișcare a corpului este $\ddot{\vec{r}} = \vec{g} + k^2\vec{r}$. Proiecțiile după Ox și Oy sînt:

$$\ddot{x} - k^2 x = 0, \tag{1}$$

$$\ddot{y} - k^2 y = -g. \tag{2}$$

Condițiile inițiale sînt:

$$\text{la } t = 0,\ x_0 = 0,\ y_0 = b,\ \dot{x} = v_0,\ \dot{y} = 0. \tag{3}$$

Rezolvînd (1) și (2) și ținînd seama de (3) obținem:

$$x = \frac{v_0}{2k}(e^{kt} - e^{-kt}) = \frac{v_0}{k}\operatorname{sh} kt, \tag{4}$$

$$y = \frac{1}{2}\left(b - \frac{g}{k^2}\right)(e^{kt} + e^{-kt}) + \frac{g}{k^2} = \left(b - \frac{g}{k^2}\right)\operatorname{ch} kt + \frac{g}{k^2}. \tag{5}$$

Eliminînd timpul între (4) și (5) se obține ecuația traiectoriei

$$\frac{\left(y - \frac{g}{k^2}\right)^2}{\left(b - \frac{g}{k^2}\right)^2} - \frac{x^2}{\left(\frac{v_0}{k}\right)^2} = 1$$

care este o hiperbolă cu centrul în punctul $A\left(0, \frac{g}{k^2}\right)$.

2.3. Mișcarea sistemului format dintr-un număr mic de puncte materiale

2.3.1. *a*) Deoarece trebuie aflate și accelerația și tensiunea din fir, scriem ecuațiile de mișcare pentru fiecare corp în parte. Conform figurii 2.3.1 (din enunț), avem

$$m_1\vec{a}_1 = \vec{G}_1 + \vec{T}_{21} \text{ și } m_2\vec{a}_2 = \vec{G}_2 + \vec{F}_f + \vec{R}_2 + \vec{T}_{12}.$$

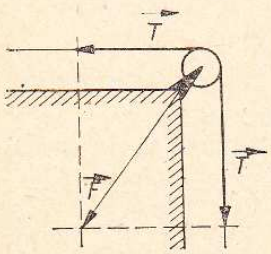


Fig. 2.3.1 R

Trebuie avut în vedere că $\vec{a}_1$ și $\vec{a}_2$ sînt vectori care au modulul egal, dar direcțiile diferite. De aceea, $|\vec{a}_1| = |\vec{a}_2| = \vec{a}$, dar $\vec{a}_1 \neq \vec{a}_2$. Deoarece firul este inextensibil și de masă neglijabilă, $|\vec{T}_{12}| = |\vec{T}_{21}| = T$, dar $\vec{T}_{12} \neq \vec{T}_{21}$. Mișcarea o raportăm la plan, pe care îl considerăm fix. Ecuațiile de mișcare este comod să le proiectăm pe direcția de mișcare (pe care o vom nota $\vec{t}$) pe direcție perpendiculară (pe care o vom nota $\vec{n}$). Deoarece $a_n = 0$ (direcția vitezei corpurilor nu se

modifică în decursul mișcării), $a_t = a$. Proiecțiile pe $\vec{t}$ și $\vec{n}$ ale ecuațiilor de mișcare sînt:

$$G_1 - T = m_1 a; \quad T - F_f = m_2 a, \quad R_2 - G_2 = 0.$$

Rezolvînd sistemul se obține ($F_f = \mu m_2 g$):

$$a = g\frac{m_1 - \mu m_2}{m_1 + m_2} = 4{,}5 \text{ m/s}^2 \text{ și } T = g\frac{m_1 m_2(1+\mu)}{m_1 + m_2} = 5{,}5 \text{ N}.$$

b) Din figura 2.3.1 R se vede că:

$$F = T\sqrt{2} = 7{,}75 \text{ N}.$$

2.3.2. Ecuațiile de mișcare pentru cele patru corpuri, în formă vectorială sînt:

$$\vec{G} + \vec{T}_1 = M\vec{a}; \quad \vec{G}_1 + \vec{T}_1' + \vec{R}_1 + \vec{T}_2 + \vec{F}_{f_1} = m_1\vec{a}_1,$$

$$\vec{G}_2 + \vec{T}_2 + \vec{R}_2 + \vec{T}_3 + \vec{F}_{f_2} = m_2\vec{a}_2; \quad \vec{G}_3 + \vec{T}_3 + \vec{R}_3 + \vec{F}_{f_3} = m_3\vec{a}_3,$$

Dar $\vec{a} \neq \vec{a}_1 \neq \vec{a}_2 \neq \vec{a}_3$, însă $|\vec{a}_1| = |\vec{a}_2| = |\vec{a}_3| = a_t = a$;

$$\vec{T}_1' \neq \vec{T}_1, \text{ dar } |\vec{T}_1'| = |\vec{T}_1| = T_1.$$

Proiecțiile pe direcțiile $\vec{t}$ și $\vec{n}$ sînt:

$$M_g - T_1 = Ma; \quad \begin{cases} T_1 - T_2 - F_{f_1} = m_1 a; \\ R_1 - m_1 g = 0. \end{cases}$$

$$\begin{cases} T_2 - T_3 - F_{f_2} = m_2 a; \\ R_2 - m_2 g = 0. \end{cases} \quad \begin{cases} T_3 - F_{f_3} = m_3 a; \\ R_3 - m_3 g = 0. \end{cases}$$

1) Rezolvînd sistemul se obține:

$$a = g\frac{M - \mu(m_1 + m_2 + m_3)}{M + m_1 + m_2 + m_3}, \quad a \neq 0 \text{ cînd } M > \mu(m_1 + m_2 + m_3).$$

2) $T_1 = M(g - a) = Mg\dfrac{(1+\mu)(m_1 + m_2 + m_3)}{M + m_1 + m_2 + m_3}$,

$$T_2 = Mg\frac{(1+\mu)(m_2 + m_3)}{M + m_1 + m_2 + m_3}, \quad T_3 = Mg\frac{(1+\mu)m_3}{M + m_1 + m_2 + m_3}.$$

2.3.3. *a*) Accelerația a va fi (ecuațiile de mișcare se scriu ușor folosind fig. 2.3.3R):

$$a = g\frac{m_2 + \Delta m - m_1}{m_1 + m_2 + \Delta m}, \quad (a > 0 \text{ dacă } m_2 + \Delta m > m_1);$$

în cazul problemei, $m_1 = m_2 = m$ și $a = g\dfrac{\Delta m}{2m + \Delta m} \simeq 9{,}8 \cdot 10^{-2} \text{m/s}^2$.

b) $T = \dfrac{1}{2}g\dfrac{m_2 - m_1 + \Delta m}{m_1 + m_2 + \Delta m}(m_1 - m_2 - \Delta m) + m_1 + m_2 + \Delta m$, dar $m_1 =$

$$= m_2 = m \text{ și } T = g\frac{2m(m + \Delta m)}{2m + \Delta m} \simeq 2{,}5 \text{ N}.$$

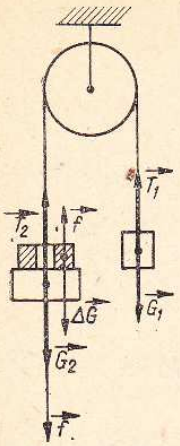


Fig. 2.3.3 R

c) $R = 2T = \dfrac{4m(m+\Delta m)}{2m+\Delta m} g = 4{,}948510$ N,

$$R_0 = (2m+\Delta m)\, g = 4{,}949000 \text{ N},$$

$$R_0 - R = (2m+\Delta m)\, g - \frac{4m(m+\Delta m)}{2m+\Delta m} g =$$

$$= \frac{\Delta m^2 g}{2m+\Delta m} = 4{,}9 \cdot 10^{-4} \text{ N}.$$

d) $f = \Delta m(g-a) = \dfrac{2m\,\Delta m g}{2m+\Delta m} \simeq 4{,}85 \cdot 10^{-2}$ N.

2.3.4. Conform figurii (vezi textul), ecuațiile de mișcare vor fi:

$$\vec{G}_1 + \vec{T}_1 = m_1\vec{a}_1, \tag{1}$$
$$\vec{T}_1 + 2\vec{T}_2 = 0, \tag{2}$$
$$\vec{G}_2 + \vec{T}_2 = m_2\vec{a}_2, \tag{3}$$
$$\vec{G}_3 + \vec{T}_3 = m_3\vec{a}_3. \tag{4}$$

Deoarece avem cinci necunoscute și numai patru ecuații trebuie să mai găsim încă o ecuație. Aceasta reprezintă o relație între accelerații:

$$\vec{a}_2 = \vec{a}_B + \vec{a}_2', \quad \vec{a}_3 = \vec{a}_B + \vec{a}_3',$$

unde $\vec{a}_B$ este accelerația scripetelui B față de pământ, $\vec{a}_2'$ și $\vec{a}_3'$ sînt accelerațiile corpurilor de masă m_2 și m_3 față de scripetele B. Dar $\vec{a}_B = -\vec{a}_1$, deci $\vec{a}_2 = -\vec{a}_1 + \vec{a}_2'$; $\vec{a}_3 = -\vec{a}_1 + \vec{a}_3'$. Ținînd seama că $\vec{a}_2' = -\vec{a}_3'$, obținem prin adunare:

$$-2\vec{a}_1 = \vec{a}_2 + \vec{a}_3. \tag{5}$$

Deoarece $m_1 > (m_2 + m_3)$, $\vec{a}_1$ va fi îndreptat în sensul pozitiv ales de noi, iar $\vec{a}_3$ va fi îndreptat în sus ($m_2 > m_3$). Sensul lui $\vec{a}_2$ rezultă din calcul, deocamdată îl vom considera îndreptat în jos. Proiecțiile pe verticală ale ecuațiilor (1) —(5) vor fi:

$$\begin{cases} m_1 g - T_1 = m_1 a_1, \\ T_1 - 2T_2 = 0, \ (m_B = 0) \\ m_2 g - T_2 = m_2 a_2, \\ m_3 g - T_2 = -m_3 a_3, \\ -2a_1 = a_2 - a_3. \end{cases} \tag{6}$$

Rezolvînd sistemul (6) obținem:

$$a_1 = g\left(1 - \frac{8}{4 + \dfrac{m_1}{m_2} + \dfrac{m_1}{m_3}}\right), \quad a_2 = g\left(1 - \frac{4}{\dfrac{4m_2}{m_1} + 1 + \dfrac{m_2}{m_3}}\right),$$

$$a_3 = g\left(\frac{4}{\dfrac{4m_3}{m_1} + \dfrac{m_3}{m_2} + 1} - 1\right)$$

și pentru tensiuni

$$T_1 = 2T_2,\ T_2 = \frac{4g}{\frac{4}{m_1} + \frac{1}{m_2} + \frac{1}{m_3}}.$$

Relativ la semnul lui $\vec{a}_2$ facem următoarea observație: $\vec{a}_2$ a fost presupus îndreptat în sensul pozitiv ales, adică $a_2 > 0$. Din această condiție rezultă relația obligatorie dintre mase:

$$m_3 < \frac{m_1 m_2}{3m_1 - 4m_2}.$$

Dacă ea nu este îndeplinită, $\vec{a}_2$ este îndreptat în sens invers.

2.3.5. Notăm cu $\vec{T}$ tensiunea în fir și cu $\vec{f}$ forța de frecare dintre fir și inel. Ecuațiile de mișcare pentru corpul de masă m_1, inelul de masă m_2 și pentru fir vor fi (fig. 2.3.5R): $\vec{G}_1 + \vec{T}_1 = m_1\vec{a}_1$; $\vec{T}_2 + \vec{f} = 0$; $\vec{G}_2 + \vec{f} = m_2\vec{a}_2'$, unde $\vec{a}_1$ și $\vec{a}_2'$ sînt accelerațiile față de pămînt. Alegînd direcția de mișcare și sensul pozitiv ca în figură și ținînd seama de faptul că $\vec{T}_1 \neq \vec{T}_2$, dar $|\vec{T}_1| = |\vec{T}_2| = T$, proiecțiile ecuațiilor de mișcare după direcția aleasă se scriu:

$-m_1g + T = -m_1a_1$; $-T + f = 0$; $-f + m_2g = m_2a_2' = m_2(a_2 - a_1)$,

deoarece $\vec{a}_2' = \vec{a}_1 + \vec{a}_2$ sau $a_2' = a_2 - a_1$. Rezolvînd sistemul se obține:

$$a_1 = \frac{m_1g - m_2(g - a_2)}{m_1 + m_2} \text{ și } f = \frac{m_1m_2(2g - a_2)}{m_1 + m_2}.$$

2.3.6. *a)* $T = \frac{2m_1m_2}{m_1 + m_2}\left(g + \frac{a_1 + a_2}{2}\right)$.

b) $a = \frac{(m_2 - m_1)g + m_2a_2 - m_1a_1}{m_1 + m_2}$.

c) $w_1 = a_1 + a = \frac{(m_2 - m_1)g + m_2(a_1 + a_2)}{m_1 + m_2}$,

$w_2 = a_2 - a = \frac{(m_1 - m_2)g + m_1(a_1 + a_2)}{m_1 + m_2}$.

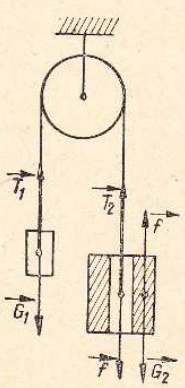


Fig. 2.3.5 R

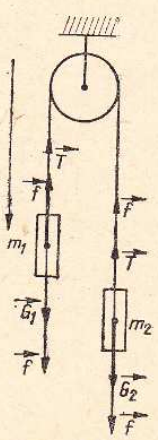


Fig. 2.3.6 R

2.3.7. Ecuațiile de mișcare ale corpurilor proiectate pe sistemul de axe de coordonate ca cel din figură sînt: $f = m_1 a_{1x}$; $m_1 g - T = m_1 a_{1y}$ și $2T - f = m_2 a_{2x}$; $m_2 g + T - R = 0$.

Dar $a_{1x} = a_{2x} = a$ și $a_{1y} = 2a$, deoarece firul este inextensibil.

Rezolvînd sistemul de ecuații se obține: $a = \dfrac{2m_1 g}{5m_1 + m_2}$.

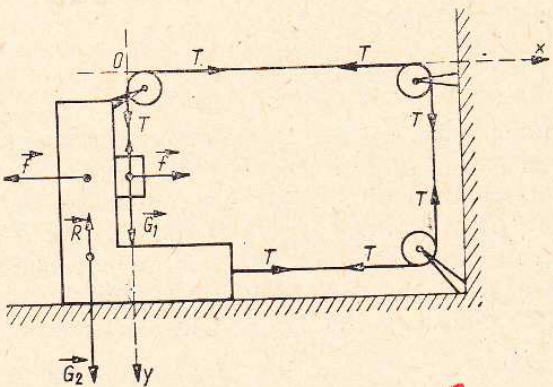


Fig. 2.3.7 R

Ecuația traiectoriei corpului de masă m_1 se obține folosind ecuațiile cinematice ale mișcării:

$$x = \frac{at^2}{2} \text{ și } y = \frac{at^2}{2}.$$

De unde se obține dreapta $x = y$ (prima bisectoare).

2.3.8. *a*) Conform notațiilor din figura 2.3.8 R avem:

$$T = g\,\frac{m_1 m_2 m_3(2 + \mu_1 + \mu_2)}{m_1 m_2 + m_1 m_3 + 4m_2 m_3},\quad a_1 = g\,\frac{m_1(m_2 + m_3) - 2m_2 m_3(\mu_1 + \mu_2)}{m_1 m_2 + m_1 m_3 + 4m_2 m_3}$$

$$a_2 = g\,\frac{m_1 m_3(2 + \mu_2) - \mu_1 m_2(m_1 + 4m_3)}{m_1 m_2 + m_1 m_3 + 4m_2 m_3},$$

$$a_3 = g\,\frac{m_1 m_2(2 + \mu_1) - \mu_2 m_3(m_1 + 4m_2)}{m_1 m_2 + m_1 m_3 + 4m_2 m_3}.$$

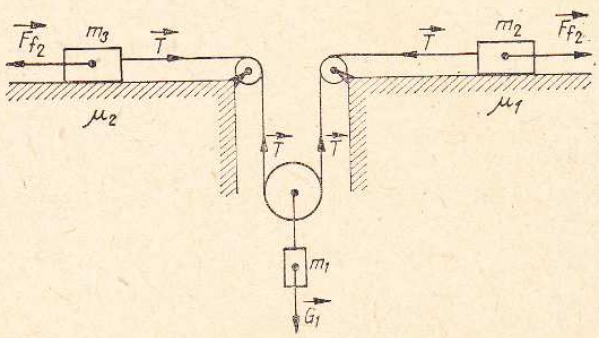


Fig. 2.3.8 R

b) În acest caz:

$$T = \frac{mg}{3}(1 + \mu) = 4 \text{ N}, \; a_1 = a_2 = a_3 = a = g\frac{1 - 2\mu}{3} = 2 \text{ m/s}^2.$$

2.3.9. Ecuația de mișcare a corpului, proiectată pe axa Ox este $m\ddot{x} = mg\cos\varphi$, care integrată cu condițiile inițiale la $t = 0$, $x = 0$, $v = 0$, dă soluția $x = \frac{gt}{2}\cos\varphi$ sau $t^2 = \frac{2x}{g\cos\varphi}$.

Aplicînd teorema sinusului în triunghiul ABC obținem, notînd cu x_B distanța AB și cu t_B timpul în care este parcursă această distanță: $t_B = \sqrt{\frac{2}{g\cos\varphi} \cdot \frac{l\sin\alpha}{\cos(\alpha - \varphi)}}$. t_B este minim pentru $\frac{dt}{d\varphi} = 0$, deci, $\sin\varphi\cos(\alpha - \varphi) - \cos\varphi\sin(\alpha - \varphi) = 0$. De aici rezultă $\varphi = \frac{\alpha}{2}$.

2.3.10. Alegem sistemul de referință fix, ca în figură, cu originea în poziția inițială a automobilului. Forțele care acționează asupra automobilului sînt: greutatea sa $M\vec{g}$, forța de frecare dintre roți și scîndură care pune în mișcare automobilul $\vec{f}_{1,2}$, forța de frecare la înaintare $\vec{F}_{1,2}$, forța de reacție din partea scîndurii $\vec{R}_{1,2}$. Asupra scîndurii acționează forțele: greutatea scîndurii $m\vec{g}$, forțele $\vec{f}_{2,1}$, $\vec{F}_{2,1}$ și $\vec{R}_{2,1}$, conform principiului acțiunii și reacțiunii, forța de frecare dintre scîndură și plan $\vec{F}_2$ și forța de reacție din partea planului $\vec{R}_2$. Este evident că $|\vec{f}_{1,2}| = |\vec{f}_{2,1}| = f$; $|\vec{F}_{1,2}| = |\vec{F}_{2,1}| = F_1$ și $|\vec{R}_{1,2}| = |\vec{R}_{2,1}| = R_1$.

Ecuațiile de mișcare proiectate pe axele Ox și Oy sînt:

$$f + Mg\sin\alpha - F_1 = Ma, \quad (1)$$

$$R_1 - Mg\cos\alpha = 0, \quad (2)$$

$$F_1 + F_2 + mg\sin\alpha - f = 0, \quad (3)$$

$$R_2 - R_1 - mg\cos\alpha = 0. \quad (4)$$

Adunînd (1) cu (3) și (2) cu (4) și ținînd seama că $F_2 = \mu_2 R_2$, obținem $g(m + M)\sin\alpha + \mu_2 R_2 = Ma$; $R_2 - g(m + M)\cos\alpha = 0$. Rezolvînd acest sistem de ecuații obținem:

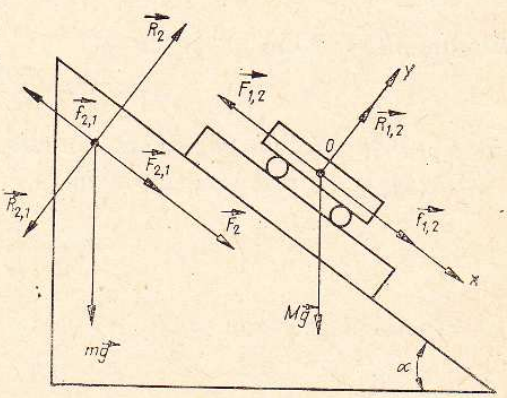


Fig. 2.3.10 R

$$a = g\left(1 + \frac{m}{M}\right)(\sin\alpha + \mu_2\cos\alpha).$$

Se vede că a nu depinde de μ_1, adică de frecarea dintre automobil și scîndură, în sensul că ea poate avea orice valori, dar obligatoriu ea trebuie să fie diferită de zero. În caz contrar, $f = 0$ și scîndura nu se va mișca în sus pe plan.

2.3.11. Forțele care acționează asupra celor două corpuri sînt indicate în figura 2.3.11R.

Ecuațiile de mișcare vor fi:

$$m\vec{g} + \vec{R} + \vec{F}_f = m\vec{a},$$

$$M\vec{g} + \vec{F}_f + \vec{R} + \vec{N} = m\vec{A}.$$

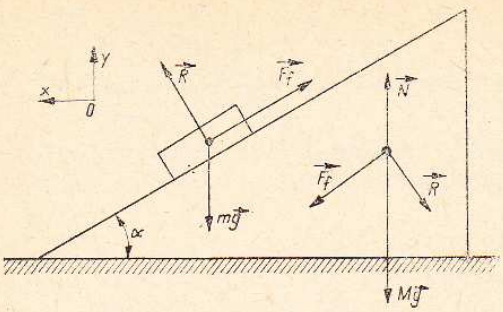


Fig. 2.3.11 R

Proiecțiile acestor ecuații pe axele Ox și Oy ale sistemului de referință fix sînt ținînd seama că $F_f = \mu R$ și $A_x = A$, $A_y = 0$:

$$R \sin \alpha - \mu R \cos \alpha = ma_x, \quad (1)$$

$$-mg + R \cos \alpha + \mu R \sin \alpha = ma_y, \quad (2)$$

$$+\mu R \cos \alpha - R \sin \alpha = -MA, \quad (3)$$

$$-Mg - \mu R \sin \alpha - R \cos \alpha + N = 0. \quad (4)$$

1) În (3), am considerat că pana se mișcă în sensul negativ al axei Ox. Dacă din calcule rezultă $A > 0$, sensul de mișcare ales este cel real. Acest sistem de patru ecuații conține cinci necunoscute. Pentru a fi compatibil, mai avem nevoie de o ecuație. Aceasta va fi ecuația ce leagă accelerațiile între ele.

Notăm cu $\vec{a}'$ accelerația corpului față de pană; atunci:

$$\vec{a} = \vec{A} + \vec{a}'. \quad (5)$$

Deoarece $\vec{A} = \vec{A}_x$ și $\vec{a}'$ este paralelă cu suprafața planului înclinat și îndreptată în jos, avem următoarele proiecții ale ecuației (5) pe axele Ox și Oy:

$$a_x = -A + a' \cos \alpha; \quad a_y = -a' \sin \alpha. \quad (6)$$

Eliminînd pe a' din (6) obținem:

$$a_y = -(a_x + A) \operatorname{tg} \alpha. \quad (7)$$

Sistemul de rezolvat este acum format din ecuațiile (1), (2), (3), (4) și (7).

Din (1) și (3) prin adunare avem:

$$a_x = \frac{M}{m} A. \quad (8)$$

Eliminînd pe R din (2) și (3) avem:

$$a_y = -g + \frac{MA}{m} \frac{1 + \mu \operatorname{tg} \alpha}{\operatorname{tg} \alpha - \mu}. \quad (9)$$

Din (7), (8) și (9) obținem:

$$A = \frac{g}{\frac{M}{m} \frac{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha}{\operatorname{tg} \alpha - \mu} + \operatorname{tg} \alpha}. \quad (10)$$

Din (8) și (10) rezultă:

$$a_x = \frac{g}{\frac{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha}{\operatorname{tg} \alpha - \mu} + \frac{m}{M} \operatorname{tg} \alpha}. \quad (11)$$

Din (7), (10) și (11) se obține:

$$a_y = -\frac{g\left(\frac{M}{m}+1\right)\operatorname{tg}\alpha}{\frac{M}{m}\frac{1+\operatorname{tg}^2\alpha}{\operatorname{tg}\alpha-\mu}+\operatorname{tg}\alpha}. \tag{12}$$

Accelerația a va fi:

$$a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2}.$$

2) Din (3) și (10) avem:

$$R = \frac{M}{\cos\alpha\,(\operatorname{tg}\alpha-\mu)}\cdot\frac{g}{\frac{M}{m}\frac{1+\operatorname{tg}^2\alpha}{\operatorname{tg}\alpha-\mu}+\operatorname{tg}\alpha}. \tag{13}$$

Din (4) și (13) avem:

$$N = Mg\left(1+\frac{1}{\frac{M}{m}\frac{1+\operatorname{tg}^2\alpha}{\operatorname{tg}\alpha-\mu}+\operatorname{tg}\alpha}\right). \tag{14}$$

3)

$$A = \frac{mg\sin^2\alpha}{2(M+m\sin^2\alpha)},\quad a_x = \frac{gM\sin 2\alpha}{2(M+m\sin^2\alpha)},$$

$$a_y = -\frac{g(M+m)\sin 2\alpha}{2(M+m\sin^2\alpha)},\quad a = \frac{g\sin 2\alpha\sqrt{M^2+(M+m)^2}}{2(M+m\sin^2\alpha)}.$$

2.3.12. Accelerația cînd corpul urcă pe plan este:

$$a = g\frac{M-m(\sin\alpha+\mu\cos\alpha)}{M+m};\quad (1)$$

accelerația cînd corpul coboară pe plan este:

$$a = g\frac{m(\sin\alpha-\mu\cos\alpha)-M}{M+m}.\quad (2)$$

Din (1) și (2) rezultă valorile lui M pentru care sistemul rămîne în repaus, anume:

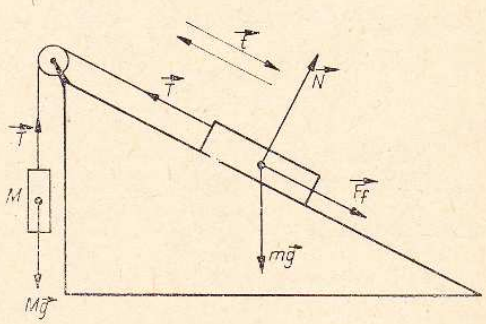


Fig. 2.3.12 R

$$m(\sin\alpha-\mu\cos\alpha) \leqslant M \leqslant m(\sin\alpha+\mu\cos\alpha).$$

Corpul se va mișca în sus pe plan dacă a în (1) este pozitiv. Această mișcare se realizează, deci, dacă $M \geqslant m\,(\sin\alpha+\mu\cos\alpha)$. În acest caz, accelerația are expresia dată de (1), iar

$$T = \frac{mMg}{M+m}(1+\sin\alpha+\mu\cos\alpha).$$

Corpul va coborî pe plan dacă a în (2) este pozitiv. Această mișcare se realizează dacă $M \leqslant m(\sin \alpha - \mu \cos \alpha)$. În acest caz, accelerația este dată de (2), iar

$$T = \frac{mMg}{M+m}(1 + \sin \alpha - \mu \cos \alpha).$$

2.3.13. *a*) Pentru unghiuri mai mici ca φ avem condiția de echilibru $mg \sin \varphi - \mu mg \cos \varphi = 0$, de unde $\mu = \operatorname{tg} \varphi$. Ecuația de mișcare proiectată pe direcția de mișcare cînd corpul coboară cu viteza limită pe plan este:

$$mg \sin \alpha - \mu mg \cos \alpha - kc = 0. \tag{1}$$

Din momentul în care începe mișcarea corpului pînă la atingerea vitezei limită, c, este valabilă ecuația de mișcare

$$m \frac{dv}{dt} = mg \sin \alpha - \mu mg \cos \alpha - kv \tag{2}$$

sau

$$\frac{dv}{dt} = g(\sin \alpha - \mu \cos \alpha) - \frac{k}{m} v, \tag{3}$$

unde v este viteza instantanee.

Introducînd în (3) $\mu = \operatorname{tg} \varphi$ și raportul $\frac{k}{m}$ calculat din (1), obținem după separarea variabilelor:

$$dt = \frac{dv}{g \dfrac{\sin(\alpha - \varphi)}{\cos \varphi} \dfrac{c - v}{c}}. \tag{4}$$

Integrăm (4) între limitele $0 \to T$ și $0 \to c/2$ și obținem:

$$T = \frac{c \cos \varphi}{g \sin(\alpha - \varphi)} \ln 2 \simeq 1 \text{ s}.$$

b) Spațiul parcurs se poate obține integrînd ecuația diferențială (3). Aici vom folosi însă ecuațiile cinematice ale mișcării $ds = v\,dt$, $dv = a dt$, din care rezultă $ds = \frac{v\,dv}{a}$, unde a este accelerația care din (2) are expresia:

$$a = g \frac{\sin(\alpha - \varphi)}{\cos \varphi} \cdot \frac{c - v}{c}. \tag{5}$$

Deci

$$ds = \frac{v\,dv}{g \dfrac{\sin(\alpha - \varphi)}{\cos \varphi} \dfrac{c - v}{c}}, \tag{6}$$

care prin integrare dă

$$s = \frac{c^2 \cos \varphi}{g \sin(\alpha - \varphi)} \left(\ln 2 - \frac{1}{2}\right) \simeq 0{,}5 \text{ m}.$$

c) Cantitatea de căldură raportată la unitatea de masă va fi dată de expresia:

$$q = \frac{Q}{m} = \frac{L_{F_f}}{m}, \tag{7}$$

unde L_{F_f} este lucrul mecanic al forțelor de frecare. Dar

$$\mathrm{d}L_{F_f} = kv\,\mathrm{d}s \text{ și } L_{F_f} = \int_0^s kv\,\mathrm{d}s.$$

$\mathrm{d}s$ fiind dat de (6) avem:

$$q = \frac{kc^2\cos\varphi}{mg\sin(\alpha-\varphi)}\int_0^{c/2}\frac{v^2\,\mathrm{d}v}{c-v}. \tag{8}$$

Făcînd calculele se obține:

$$q = c^2\left(\ln 2 - \frac{5}{8}\right) = 0{,}21 \text{ J/kg}.$$

2.3.14. *a*) Proiecțiile ecuațiilor de mișcare pe direcția tangentă mișcării $\vec{t}$ se obțin din figura 2.3.14R;

$$m_1 g\sin\beta - T - m_1 g\mu\cos\beta = m_1 a,$$
$$T - m_2 g\sin\alpha - m_2 g\mu\cos\alpha = m_2 a,$$

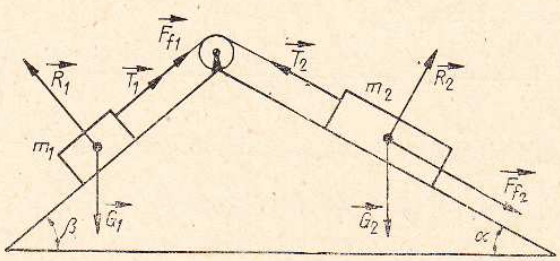


Fig. 2.3.14 R

de unde

$$a = g\frac{m_1(\sin\beta - \mu\cos\beta) - m_2(\sin\alpha + \mu\cos\alpha)}{m_1 + m_2}.$$

Pentru $m_1 = m_2 = m = 1$ kg, se obține:

$$a = g\frac{(\sin\beta - \mu\cos\beta) - (\sin\alpha + \mu\cos\alpha)}{2} = 0{,}244 \text{ m/s}^2.$$

b)
$$T = \frac{m_1 m_2[\sin\alpha + \sin\beta + \mu(\cos\alpha - \cos\beta)]}{m_1 + m_2},$$

pentru $m_1 = m_2 = m = 1$ kg, avem:

$$T = \frac{mg}{2}[\sin\alpha + \sin\beta + \mu(\cos\alpha - \cos\beta)] \simeq 6 \text{ N}.$$

2.3.15. Din condiția de echilibru pentru unghiuri mai mici sau egale cu φ avem $\mu = \operatorname{tg} \varphi$. Cînd corpul coboară uniform cu viteza limită c, ecuația de mișcare proiectată pe direcția mișcării este:

$$mg \sin \alpha - \mu mg \cos \alpha - kc^2 = 0. \tag{1}$$

Din (1) se poate exprima raportul:

$$\frac{k}{m} = \frac{g}{c^2} \frac{\sin (\alpha - \varphi)}{\cos \varphi}. \tag{2}$$

Ecuația de mișcare a corpului pe plan în sus este:

$$ma_1 = -mg \sin \alpha - \mu mg \cos \alpha - kv^2. \tag{3}$$

Din (3), ținînd seama de (2) și de expresia pentru μ, putem exprima pe a_1 care este:

$$a_1 = -\frac{g}{\cos \varphi} \left[\sin (\alpha + \varphi) + \frac{v^2}{c^2} \sin (\alpha - \varphi) \right] \tag{4}$$

1) Cunoscînd pe a_1 putem afla spațiul S, integrînd ecuația cinematică a spațiului $ds = \frac{v\,dv}{a_1}$ între limitele v_0 și 0, adică:

$$S = -\int_{v_0}^{0} \frac{v\,dv}{a_1} = \int_0^{v_0} \frac{v\,dv}{a_1}, \quad S = \frac{c^2 \cos \varphi}{g} \int_0^{v_0} \frac{v\,dv}{v^2 \sin (\alpha - \varphi) + c^2 \sin (\alpha + \varphi)}.$$

Calculînd integrala obținem:

$$S = \frac{c^2 \cos \varphi}{2g \sin (\alpha - \varphi)} \ln \frac{v_0^2 \sin (\alpha - \varphi) + c^2 \sin (\alpha + \varphi)}{c^2 \sin (\alpha + \varphi)}, \quad S \simeq 2{,}2 \text{ m}. \tag{5}$$

2) Cînd corpul coboară pe plan, ecuația mișcării este:

$$mg \sin \alpha - \mu mg \cos \alpha - kv^2 = ma_2. \tag{6}$$

Din (6) și (2) avem pentru a_2:

$$a_2 = \frac{g \sin (\alpha - \varphi)}{\cos \varphi} \frac{c^2 - v^2}{c^2}. \tag{7}$$

Corpul începe să coboare pe plan fără viteză inițială și are de parcurs spațiul S, dat de (5), pînă la baza planului. Viteza v_f la baza planului se obține integrînd ecuația cinematică $ds = \frac{v\,dv}{a_2}$:

$$\int_0^S ds = \int_0^{v_f} \frac{v\,dv}{a_2} \text{ sau } S = \frac{1}{2} \frac{c^2 \cos \varphi}{g \sin (\alpha - \varphi)} \ln \frac{c^2}{c^2 - v_f^2}. \tag{8}$$

Egalînd pe (8) cu (5) obținem v_f:

$$v_f^2 = \frac{v_0^2}{\frac{v_0^2}{c^2} + \frac{\sin (\alpha + \varphi)}{\sin (\alpha - \varphi)}} = 1 \text{ m/s}.$$

2.4. Impuls. Momentul cinetic (momentul impulsului)

2.4.1. Teorema impulsului se scrie:

$$\vec{I}_f = \vec{R}\Delta t = \Delta\vec{p} = m\vec{v}_2 - m\vec{v}_1.$$

unde $\vec{I}_f$ este impulsul forței rezultante. Alegînd axele Ox și Oy în lungul diametrelor cercului, proiecțiile ecuației (1) pe axe vor fi:

$$I_{f_x} = R_x\Delta t = mv_B - 0,$$

$$I_{f_y} = R_y\Delta t = 0 - mv_A.$$

Deci, dacă ținem seama că $v_A = v_B = v$,

$$I_f = \sqrt{I_{f_x}^2 + I_{f_y}^2} = mv\sqrt{2}.$$

2.4.2. Din teorema impulsului avem:

$$\vec{I}_f = \vec{F}\Delta t = \Delta\vec{p} = m\vec{v}_2 - m\vec{v}_1. \quad (1)$$

Proiecțiile ecuației (1) după Ox și Oy sînt:

$$I_{f_x} = F_x\Delta t = mv_{2x} - m(-v_{1x}),$$

$$I_{f_y} = F_y\Delta t = m(-v_{2y}) - m(-v_{1y}). \quad (2)$$

Dar $v_{2x} = v_{1x} = v_x$ și $v_{2y} = v_{1y} = v_y$, deci (2) devine:

$$I_{f_x} = F_x\Delta t = m(v_x + v_x) = 2mv_x,$$

$$I_{f_y} = F_y\Delta t = m(-v_y + v_y) = 0.$$

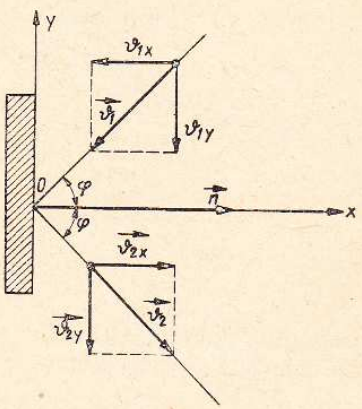


Fig. 2.4.2 R

Dar $v_x = v\cos\varphi$, deci $I = I_{f_x} = 2mv\cos\varphi = 2{,}8 \cdot 10^{-23}$ N · s.

Se vede că în procesul ciocnirii perfect elastice, asupra moleculei acționează o forță avînd direcția normalei la perete.

2.4.3 $$\Delta t = \left|\frac{mv_1}{R}\right| \simeq 20 \text{ s}, \quad S = \frac{v_1^2}{2a} \simeq 200 \text{ m}.$$

2.4.4. $$\Delta t = \frac{v}{g(\sin\alpha - \mu\cos\alpha)} \simeq 0{,}24 \text{ s}.$$

2.4.5. $$v = \frac{k}{2m}\tau^2 - \mu g\tau = 0{,}04 \text{ m/s}.$$

2.4.6. $$m = \frac{F \cdot \Delta t}{v + \mu g\Delta t} \simeq 89{,}5 \text{ t}.$$

2.4.7. $$I_{(R)x} = mv_1 - mv_0\cos\alpha = -0{,}425 \cdot 10^4 \text{ N} \cdot \text{s};$$

$$(I_R)_y = -mv_0\sin\alpha = -4{,}3 \cdot 10^4 \text{ N} \cdot \text{s}.$$

2.4.8. Pendulul efectuează oscilații în jurul axei Oz perpendiculare pe planul figurii (fig. 2.4.8R) ce trece prin punctul O. Traiectoria este un arc de cerc, avînd raza l egală cu lungimea pendulului și centrul în punctul O. Pentru rezol-

varea problemei folosim teorema variației momentului cinetic al punctului material, pe care o raportăm la axa Oz. În acest caz avem:

$$\frac{dL_z}{dt} = \sum_{k=1}^{n} \mathcal{M}_{zF_k} \tag{1}$$

unde $\mathcal{M}_{zF_k}$ reprezintă proiecția momentului forței $\vec{F}_k$ pe axa Oz. Momentul cinetic al pendulului în raport cu axa Oz este $L_z = mvl$. Dar $v = l\dot{\varphi}$, deci:

$$L_z = ml^2\dot{\varphi}. \tag{2}$$

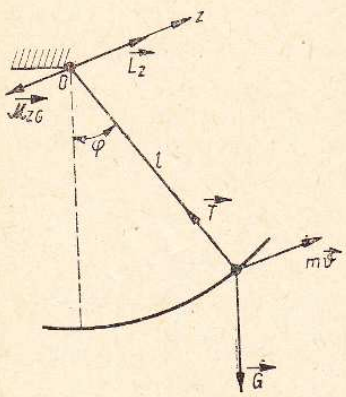


Fig. 2.4.8 R

Forțele care acționează asupra pendulului sînt indicate în figură, unde $\vec{T}$ este tensiunea în fir. Momentul ei față de Oz este egal cu zero. Proiecția momentului forței de greutate $\vec{G}$ este:

$$\mathcal{M}_{zG} = -Gl \sin \varphi. \tag{3}$$

Ținînd seama de (2) și (3), relația (1) devine:

$$\ddot{\varphi} + \frac{g}{l} \sin \varphi = 0. \tag{4}$$

Considerînd oscilațiile pendulului mici, putem dezvolta $\sin \varphi$ în serie după φ:

$$\sin \varphi = \varphi - \frac{\varphi^3}{3!} + \frac{\varphi^5}{5!} - \cdots$$

Neglijînd termenii de ordin mai mare decît unu avem $\sin \varphi \approx \varphi$; deci ecuația diferențială (4) devine:

$$\ddot{\varphi} + \frac{g}{l} \varphi = 0.$$

Notînd $\frac{g}{l} = k^2$ avem:

$$\ddot{\varphi} + k^2\varphi = 0.$$

Soluția ecuației (5) cu condițiile inițiale (la $t = 0$, $\varphi = 0$, iar $\dot{} = \dot{\varphi}$) este:

$$\varphi = \alpha \sin kt, \tag{6}$$

unde $\alpha = \frac{\dot{\varphi}_0}{k}$.

Din (6) se vede că pendulul efectuează oscilații armonice, avînd amplitudinea unghiulară α și frecvența unghiulară $k = \sqrt{\frac{g}{l}}$. Pentru unghiuri mici, $\sin \varphi \approx \varphi$, deci, frecvența unghiulară a oscilației pendulului nu depinde de condițiile inițiale ale mișcării, adică pendulul matematic are proprietatea de izocronism. Perioada de oscilație a pendulului este:

$$T = \frac{2\pi}{k} = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}}. \tag{7}$$

Perioada nu depinde, deci, de masa pendulului, ci numai de lungimea l și de g.

2.4.9. Din teorema variației momentului cinetic, proiectată pe axa Oz (Oz este perpendiculară pe Ox și Oy, din fig. 2.4.9) avem:

$$\frac{dL_z}{dt} = \sum_{k=1}^{n} \mathcal{M}_{zF_k}.$$

Dar $\sum \mathcal{M}_{zF_k} = 0$, deoarece forța de greutate $\vec{G}$ este echilibrată de reacția planului. Prin urmare, L_z este o mărime constantă, adică $L_{P_1z} = L_{P_2z}$. Dar $L_{P_1z} = mv_1OP_1$ și $L_{P_2z} = mv_2OP_2 \sin\alpha$. Egalînd cele două momente avem:

$$v_2 = v_1 \frac{OP_1}{OP_2 \sin\alpha} \simeq 7 \text{ m/s}.$$

2.5. Lucru mecanic, putere, energie

2.5.1. Conform figurii 2.5.1 R, avem:

$$L = L_{\vec{F}} + L_{\vec{F}_f} + L_{\vec{G}} + L_{\vec{R}},$$

dar $L_{\vec{R}} = 0$, deci, avem $L = F \cdot s - F_f \cdot s - G\Delta h$ sau

$$L = m\frac{2s}{t^2} \cdot s - \mu mg \cos\alpha \cdot s - mg \sin\alpha =$$

$$= sm\left[\frac{2s}{t^2} - g(\mu \cos\alpha + \sin\alpha)\right] \simeq -135 \text{ J}.$$

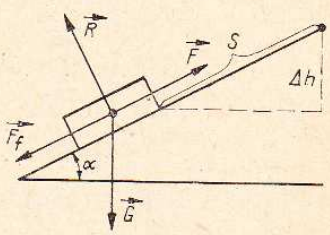


Fig. 2.5.1 R

2.5.2. $$L = -\int_{R_p}^{\infty} k\frac{mM}{R^2}\,dR = -\frac{kmM}{R_p}, \text{ dar } k = \frac{gR_p^2}{M},$$

unde R_p — raza Pămîntului, M — masa Pămîntului. Folosind datele numerice avem:

$$L = -3{,}18 \cdot 10^{11} \text{ J}.$$

2.5.3. *a)* $P = F_f v = 6{,}9$ kW; *b)* $P' = G(\sin\varphi + \mu\cos\varphi)\, v = 11{,}8$ kW; *c)* $P'' = G(\mu\cos\varphi - \sin\varphi)\, v = 2$ kW.

2.5.4. $P = 2Gv \sin\varphi = 11{,}8$ kW.

2.5.5. Notăm prin O și B poziția inițială, respectiv, cea mai îndepărtată poziție a corpului față de cea inițială (fig. 2.5.5R), iar prin M o poziție oarecare. Deoarece în pozițiile O și B, viteza corpului este zero, din teorema energiei cinetice rezultă că lucrul mecanic al forțelor $\vec{F}$ și $\vec{G}$ pe distanța OB este zero. Lucrul mecanic este:

$$L = L_{\vec{G}} + L_{\vec{F}} = Gx_{max} - \int_0^{x_{max}} F\,dx = Gx_{max} - \frac{1}{2}kx_{max}^2.$$

Deci $Gx_{max} - \frac{1}{2}kx_{max}^2 = 0$, de unde $x_{max} = \frac{2G}{k} = \frac{2mg}{k}$. În poziția de echilibru, $|\vec{G}| = |\vec{F}|$. Dacă notăm cu x_{static} deformarea resortului corespunzătoare

poziției de echilibru, avem $kx_{static} = G$ sau $x_{static} = G/k$. Folosind pe x_{static}, avem $x_{max} = 2x_{static}$.

2.5.6. Din teorema energiei cinetice avem:

$$\frac{mv^2}{2} - \frac{mv_0^2}{2} = -mgh.$$

Deci viteza căutată este $v = \sqrt{v_0^2 - 2gh}$.

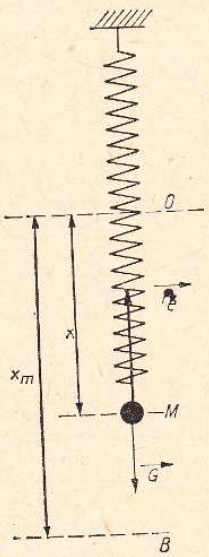


Fig. 2.5.5. R

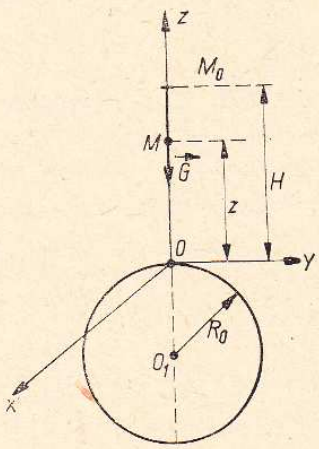


Fig. 2.5.7 R

2.5.7. Legăm originea sistemului de axe de coordonate de punctul de cădere O (fig. 2.5.7R), Ox și Oy fiind în planul orizontal. Forța de greutate la altitudinea z este $G = mg_z$, unde $g_z = \dfrac{g_0 R_0^2}{(R_0 + z)^2}$ este valoarea accelerației gravitaționale la altitudinea dată, g_0 — accelerația gravitațională la suprafața Pământului ($z = 0$), R_0 — raza Pământului.

Lucrul mecanic elementar cînd $\vec{G}$ se deplasează cu $d\vec{r}$ este:

$$dL = X\,dx + Y\,dy + Z\,dz. \qquad (1)$$

Lucrul mecanic total se obține integrînd relația (1):

$$L = -m\int_H^0 g_z\,dz = m\int_0^H \frac{g_0 R_0^2\,dz}{(R_0 + z)^2}.$$

Calculînd integrala avem $L = \dfrac{mg_0 R_0 H}{R_0 + H}$.

Deoarece $v_0 = 0$, din teorema energiei cinetice avem:

$$\frac{mv^2}{2} = \frac{mg_0 R_0 H}{R_0 + H},$$

de unde

$$v = \sqrt{\frac{2g_0R_0H}{R_0 + H}} = \sqrt{\frac{2g_0H}{1 + \frac{H}{R_0}}}.$$

Se vede că dacă $H \ll R_0$, obținem formula cunoscută a lui Galilei: $v = \sqrt{2g_0H}$.

2.5.8. Proiecția ecuației de mișcare pe axa Ox este:

$$m\frac{dv}{dt} = -kv^2, \quad k = \text{constant}. \tag{1}$$

1) Integrînd (1) cu condițiile inițiale (la $t = 0$, $v = v_0$) obținem dependența vitezei de timp:

$$v = \frac{mv_0}{m + kv_0t}. \tag{2}$$

2) Din (2) se observă că $v \to 0$ cînd $t \to \infty$. Deci, barca nu se va opri. Acest rezultat neverosimil provine din faptul că s-a presupus $R = -kv^2$. La viteze mici, R depinde linear de viteză: $R = -kv$.

3) Notăm cu τ timpul de oprire (τ este finit). Atunci spațiul parcurs pînă la oprire este

$$S = \int_0^\tau v\,dt = \int_0^\tau \frac{mv_0}{m + kv_0t}\,dt$$

sau

$$S = \frac{m}{k}\ln\left(1 + \frac{kv_0}{m}\tau\right).$$

4) $dA = -kv^2\,ds$, dar $ds = v\,dt$. Folosind (2), obținem

$$dL = -k\left(\frac{mv_0}{m + kv_0t}\right)^3 dt. \tag{3}$$

Integrînd (3) între 0 și ∞ obținem:

$$L = -\frac{mv_0^2}{2}.$$

2.5.9. La $t = 0$, $\vec{r}_0 = 2\vec{i} + 3\vec{j}$ m și $\vec{v}_0 = 3\vec{j} + \vec{k}$ m/s.

Deci *a*) $\vec{F}_0 = 18\vec{i} + 12\vec{j} - 13\vec{k}$ N;

b) $\vec{a}_0 = 18\vec{i} + 12\vec{j} - 13\vec{k}$ m/s²;

c) $E_{c0} = \frac{mv_0^2}{2} = \frac{m}{2}(v_{0x}^2 + v_{0y}^2 + v_{0z}^2) = 5$ J;

d) $\frac{dE_{c0}}{dt} = \vec{F}_0\vec{v}_0 = 23$ J/s;

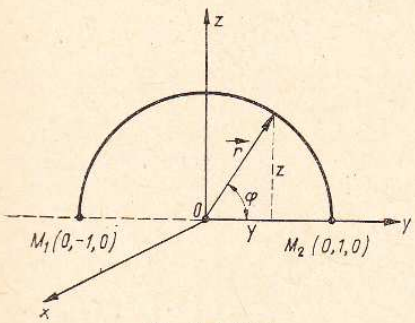


Fig. 2.5.10 R

2.5.10. Lucrul mecanic elementar al forței F este:

$$dL = F_x\,dx + F_y\,dy + F_z\,dz.$$

a) La deplasarea de-a lungul axei Oy, efectuează lucru mecanic numai F_y. Dar $F_y = 3x^2 = 0$; de aceea și lucrul mecanic al forței $\vec{F}$ este egal cu zero.

b) $L = \int_{M_1}^{M_2} F_z\,dz = -\int_{M_1}^{M_2} y^2\,dz.$

Dar $z = \sin\varphi$ și $y = \cos\varphi$ $(r = 1)$.

Deci, trecînd la coordonate polare, (1) devine:

$$L = -\int_{\pi}^{0} \cos^3\varphi\,d\varphi = -\left|\sin\varphi - \frac{1}{3}\sin^3\varphi\right|_{\pi}^{0} = 0.$$

Lucrul mecanic al forței $\vec{F}$ cînd corpul se deplasează din M_1 în M_2 depinde de drumul pe care se face deplasarea, în consecință, $\vec{F}$ nu este conservativă.

2.5.11. *a*) Lucrul mecanic elementar al forței $\vec{F}$ este:

$$dL = F_x\,dx + F_y\,dy + F_z\,dz.$$

Dar $F_z = 0$, iar lucrul total se obține prin integrare:

$$L = \int_0^{-2} 4\,dx + \int_0^4 (-5)\,dy = -28 \text{ J}.$$

b) $$P_m = \frac{|L|}{t} = 280 \text{ W}.$$

c) Ecuațiile cinematice ale mișcării sînt:

$$x = v_{0x}\tau + \frac{a_x\tau^2}{2}, \quad y = v_{0y}\tau + \frac{a_y\tau^2}{2}, \quad z = v_{0z}\tau + \frac{a_z\tau^2}{2},$$

$$v_x = v_{0x} + a_x\tau, \quad v_y = v_{0y} + a_y\tau, \quad v_z = v_{0z} + a_z\tau,$$

unde

$$a_x = \frac{F_x}{m}, \quad a_y = \frac{F_y}{m}, \quad a_z = \frac{F_z}{m} = 0.$$

Folosind valorile pentru coordonatele punctului M, obținem: $v_{0x} = -20{,}2$ m/s, $v_{0y} = 40{,}25$ m/s; $v_{0z} = 60$ m/s, de unde $v_0^2 = v_{0x}^2 + v_{0y}^2 + v_{0z}^2 \simeq 5\,600$ m^2/s^2, deci $E_{c0} = \frac{mv_0^2}{2} = 2\,800$ J.

Din ecuațiile pentru viteze avem: $v_x = -19{,}8$ m/s; $v_y = 39{,}75$ m/s; $v_z = 60$ m/s, deci

$$E_c = \frac{mv^2}{2} = \frac{m}{2}(v_x^2 + v_y^2 + v_z^2) \simeq 2\,772 \text{ J}.$$

d) Deoarece lucrul mecanic nu depinde de drum

$$E_p = -L = 28 \text{ J}.$$

2.5.12. *a*) Deoarece cîmpul este potențial, avem:

$$dE_p = \vec{G}\, d\vec{r} = +(G_x\, dx + G_y\, dy + G_z\, dz).$$

Prin integrare obținem:

$$E_p = -mgz + C.$$

Constanta C poate lua orice valori. Se vede că pentru un C dat și $z = \text{const}$, $E_p = \text{const}$, deci suprafețele echipotențiale sînt planele $z = \text{const}$.

b) Proiecțiile forței de atracție pe axe sînt:

$$F_x = -\frac{km}{r^3}x, \quad F_y = -\frac{km}{r^3}y, \quad F_z = -\frac{km}{r^3}z,$$

unde x, y, z sînt coordonatele punctului în care se află corpul de masă m (considerat punctiform).

Cîmpul fiind conservativ, avem:

$$dE_p = \vec{F}\, d\vec{r} = (F_x\, dx + F_y\, dy + F_z\, dz)$$

sau

$$dE_p = -\frac{km}{r^3}(x\, dx + y\, dy + z\, dz). \tag{1}$$

Este evidentă relația:

$$x\, dx + y\, dy + z\, dz = d\left(\frac{x^2 + y^2 + z^2}{2}\right) = d\left(\frac{r^2}{2}\right). \tag{2}$$

Înlocuind (2) în (1) avem:

$$dE_p = -\frac{km}{r^2}dr. \tag{3}$$

Integrînd (3) se obține $E_p = -\frac{km}{r} + C$, unde C este o constantă arbitrară.

Punînd condiția ca E_p să fie constant, obținem $r = \text{const}$. Deci, suprafețele echipotențiale sînt sfere cu centrul în originea sistemului de coordonate.

2.5.13. *a*) Într-un sistem de referință mobil, legat de corp, condiția mișcării pe traiectorie este:

$$\frac{mv^2}{R} = \frac{k}{R^2},$$

de unde

$$E_c = \frac{mv^2}{2} = \frac{m}{2}\frac{k}{mR} = \frac{k}{2R};$$

b) $$E_p = -\int_R^\infty \frac{k}{r^2}\,dr = -\frac{k}{R};$$

c) $$E = E_p + E_c = -\frac{k}{2R};$$

d) $$L = p \cdot R = m\left(\frac{k}{mR}\right)^{1/2} R = (kmR)^{1/2},$$

2.5.14. Protonii se vor apropia pînă cînd energia potențială de interacție, la distanța R, va fi egală cu energia lor cinetică inițială, adică $E_{p,R} = 2E_c$ inițial.

Dar

$$E_{p,R} = \int_R^\infty ke^2 \frac{dr}{r^2} = \frac{ke^2}{R},$$

deci

$$\frac{ke^2}{R} = 2E_c, \text{ de unde } R = \frac{ke^2}{2E_c} \simeq 1{,}44 \cdot 10^{-18}\ \text{m}.$$

2.5.15. *a*) Valoarea forței este dată de $F(r) = -\frac{\partial E_p}{\partial r}$. Dar

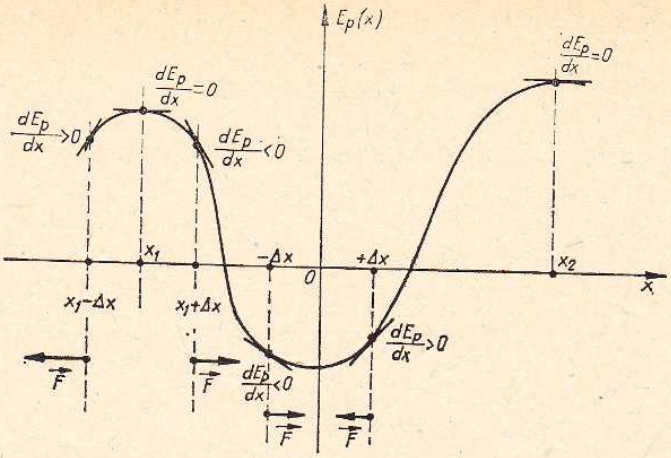
$$\frac{\partial E_p}{\partial r} = \frac{E_{p0}}{r}\left(1 + \frac{r_0}{r}\right)\exp\left\{-\frac{r}{r_0}\right\}.$$

Expresia forței $F(r)$ va fi:

$$\vec{F}(r) = -\frac{\partial E_p}{\partial r}\frac{\vec{r}}{r} = -\frac{E_{p0}}{r^2}\left(1 + \frac{r_0}{r}\right)\exp\left\{-\frac{r}{r_0}\right\}\vec{r}.$$

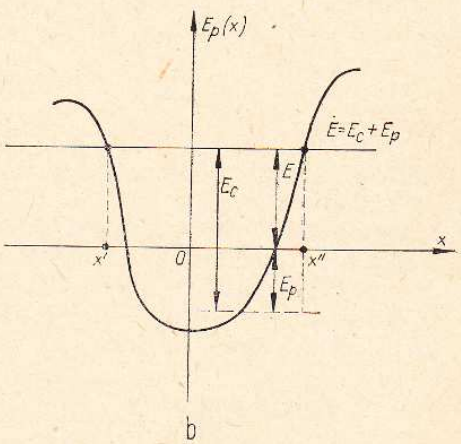
b) $$F(r_0) = \frac{2E_{p0}}{r_0 e} \simeq 3{,}92 \cdot 10^3\ \text{N}.$$

2.5.16. *a*) Din figura 2.5.16 R, *a* se vede că în punctele x_1, 0 și x_2, $\frac{dE_p}{dx} = 0$ deci forța care acționează asupra particulei este zero. Aceste puncte corespund pozițiilor de echilibru. Pentru a vedea dacă echilibrul este stabil sau instabil, considerăm o deplasare mică Δx în jurul punctului x_1. În punctul $x_1 - \Delta x$, derivata $\frac{dE_p}{dx} > 0$, deci $F < 0$. În punctul $x_1 + \Delta x$, $\frac{dE_p}{dx} < 0$ și $F > 0$.



a

Deci o mică deplasare față de poziția de echilibru x_1 va determina apariția unor forțe care vor scoate particula din poziția de echilibru (instabil). Făcînd un raționament analog, ajungem la concluzia că și punctul x_2 corespunde unei poziții de echilibru instabil. Deplasăm acum corpul tot cu Δx în jurul punctului 0. Pentru $x = 0 - \Delta x$, $\frac{dE_p}{dx} < 0$, deci $F > 0$. Pentru $x = 0 + \Delta x$, $\frac{dE_p}{dx} > 0$ și $F < 0$. Deci, forțele care apar, în acest caz, la scoaterea particulei din poziția de echilibru tind să readucă particula în poziția inițială. Punctul 0 corespunde poziției de echilibru stabil.



b

Fig. 2.5.16 R

b) Energia totală a particulei $E = E_c + E_p = \text{const}$, deoarece cîmpul este conservativ. Energia cinetică va fi egală cu diferența $E_c = E - E_p$. Deoarece $E_c \geqslant 0$, totdeauna mișcarea particulei poate avea loc între punctele x' și x'' (fig. 2.5.16R, *b*) obținute din ecuația $E = E_p$, adică particula se mișcă în „groapa de potențial" $x' \leqslant x \leqslant x''$, din care nu poate ieși. În interiorul „gropii de potențial", $E_c = \frac{mv^2}{2} \geqslant 0$ și particula efectuează o mișcare care, se repetă periodic între limitele stabilite. Perioada $T = t_{x'x''} + t_{x''x'}$, dar $t_{x'x''} = t_{x''x'}$, deci $T = 2t_{x'x''}$. Timpul necesar parcurgerii distanței $x'x''$ se obține plecînd de la expresia energiei totale

$$E = \frac{mv^2}{2} + E_p(x) = \frac{m\left(\frac{dx}{dt}\right)^2}{2} + E_p(x),$$

de unde, după separarea variabilelor,

$$dt = \frac{dx}{\sqrt{\frac{2}{m}[E - E_p(x)]}}$$

și prin integrare, $t_{x'x''} = \int_{x'}^{x''} \sqrt{\frac{m}{2}} \frac{dx}{\sqrt{E - E_p(x)}}$.

Deci

$$T = \sqrt{2m} \int_{x'}^{x''} \frac{dx}{\sqrt{E - E_p(x)}}.$$

2.5.17. $\frac{E_{p1}}{E_{p2}} = \frac{\frac{k_1 x_1^2}{2}}{\frac{k_2 x_2^2}{2}} = \frac{k_1}{k_2}\left(\frac{x_1}{x_2}\right)^2$, unde $x_{1,2}$ sînt alungirile celor două resorturi. Dar forțele elastice ce iau naștere în resorturi sînt egale în valoare, $F_{e1} = F_{e2}$ sau $k_1 x_1 = k_2 x_2$. În acest caz, raportul de mai sus devine:

$$\frac{E_{p1}}{E_{p2}} = \frac{k_2}{k_1}.$$

2.5.18. Energia potențială a sistemului este egală cu lucrul mecanic efectuat împotriva forțelor elastice ce iau naștere cînd capetele legate între ele se deplasează din O într-unul din punctele indicate (luăm, de exemplu, P_1). Numerotînd resorturile ca în figura 2.5.18, avem următoarele expresii pentru alungirile resorturilor: $\Delta l_1 = [(l_0 - y)^2 + x^2]^{1/2} - l_0$; $\Delta l_2 = [(l_0 - x)^2 + y^2]^{1/2} - l_0$; $\Delta l_3 = [(l_0 + y)^2 + x^2]^{1/2} - l_0$; $\Delta l_4 = [(l_0 + x)^2 + y^2]^{1/2} - l_0$.

Energia potențială în acest caz va fi:

$$E_p(P_1) = \frac{k}{2}(\Delta l_1^2 + \Delta l_2^2 + \Delta l_3^2 + \Delta l_4^2).$$

Datorită simetriei problemei, $E_p(P_1) = E_p(P_2) = E_p(P_3) = E_p(P_4)$. Deformările resorturilor la deplasarea capetelor legate din O în P_5, de exemplu, sînt: $\Delta l_1' = (l_0^2 + x^2)^{1/2} - l_0$; $\Delta l_2' = x$; $\Delta l_3' = (l_0^2 + x^2)^{1/2} - l_0$; $\Delta l_4' = x$. Energia potențială de deformare va fi: $E_p(P_5) = \frac{k}{2}(\Delta l_1'^2 + \Delta l_2'^2 + \Delta l_3'^2 + \Delta l_4'^2)$.

Tot datorită simetriei, $E_p(P_5) = E_p(P_6) = E_p(P_7) = E_p(P_8)$.

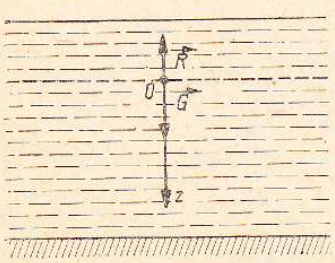


Fig. 2.5.19R

2.5.19. Mișcarea fiind rectilinie, considerăm că ea are loc de-a lungul axei Oz, pe care o orientăm ca în figura 2.5.19R, avînd originea în poziția inițială a corpului.

a) Ecuația mișcării proiectată pe axa Oz va fi:

$$m\ddot{z} = G + R_z \qquad (1)$$

sau

$$\ddot{z} = g - k\dot{z}. \qquad (2)$$

După integrare obținem:

$$-\frac{1}{k}\ln(g-k\dot{z})=t+C_1. \tag{3}$$

Pentru determinarea constantei de integrare C_1, folosim condițiile inițiale: la $t=0$, $\dot{z}=v_0$. Din (3) avem $C_1=-\frac{1}{k}\ln(g-kv_0)$. Introducînd pe C_1 în (3), obținem:

$$\frac{1}{k}\ln\frac{g-kv_0}{g-k\dot{z}}=t$$

de unde

$$v=\dot{z}=\frac{g}{k}-\frac{g-kv_0}{k}\,e^{-kt}. \tag{4}$$

b) Viteza de disipație a energiei este

$$\frac{d}{dt}(E_c+E_p)=R\frac{dz}{dt} \tag{5}$$

sau

$$\frac{d}{dt}(E_c+E_p)=-km(\dot{z})^2. \tag{6}$$

Înlocuind expresia vitezei, dată de (4) în (6) obținem:

$$\frac{d}{dt}(E_c+E_p)=-\frac{m}{k}[g-(g-kv_0)\,e^{-kt}]^2. \tag{7}$$

Din (4) se vede că pentru $t\to\infty$, $v\to v_{lim}=\frac{g}{k}=\text{const}$, adică, după un timp de mișcare se va atinge viteza limită, care nu depinde de condițiile inițiale. După ce s-a atins viteza limită, $E_c=\text{const}$ și (7) devine:

$$\frac{d}{dt}(E_c+E_p)=\frac{dE_p}{dt}=-\frac{mg}{k}.$$

2.5.20. Alegem sistemul axelor de referință xOy ca în figură, M_0 fiind poziția inițială a corpului. Condițiile inițiale: la $t=0$, $x=0$, $y=h$, $\dot{x}=v_0$, $\dot{y}=0$. (1)

Ecuația de mișcare în formă vectorială este (fig. 2.5.20R):

$$\vec{ma}=\vec{G}+\vec{R}. \tag{2}$$

În proiecție pe axele Ox și Oy, ecuația (2) devine:

$$a_x=-kv_x;\quad a_y=-g-kv_y$$

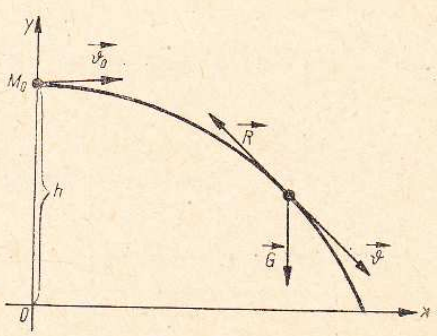


Fig. 2.5.20 R

sau

$$\ddot{x} = -k\dot{x}, \quad \ddot{y} = -g - k\dot{y}. \tag{3}$$

a) Pentru a afla pe v_x și v_y la un moment dat, integrăm ultimele ecuații pe rînd: $\frac{d\dot{x}}{dt} = -k\dot{x}$ sau $\frac{d\dot{x}}{\dot{x}} = -k\,dt$, de unde prin integrare, $\ln \dot{x} = -kt + C_1$ sau dacă ținem seama de condițiile inițiale, avem:

$$v_x = \dot{x} = v_0 e^{-kt}. \tag{4}$$

Procedăm în mod analog pentru a-l afla pe v_y; obținem:

$$v_y = \dot{y} = \frac{g}{k}(e^{-kt} - 1). \tag{5}$$

Energia cinetică va fi:

$$E_c = \frac{mv^2}{2} = \frac{m}{2}(v_x^2 + v_y^2).$$

Pentru aflarea energiei potențiale care este $E_p = -mg\,y$, trebuie să integrăm ecuația (5): $y = -\frac{g}{k}t - \frac{g}{k^2}e^{-kt} + C_3$. Din condițiile inițiale avem $C_3 = h + g/k^2$, deci y va avea expresia:

$$y = h - \frac{g}{k}t + \frac{g}{k^2}(1 - e^{-kt}). \tag{6}$$

b) Pentru aflarea ecuației traiectoriei trebuie exprimat $x = f(t)$ și $y = \varphi(t)$. Ultima ecuație este chiar (6). Pentru a-l afla pe $x = f(t)$ integrăm ecuația (4):

$$x = -\frac{v_0}{k}e^{-kt} + C_4.$$

Din condițiile inițiale avem $C_4 = \frac{v_0}{k}$, deci:

$$x = \frac{v_0}{k}(1 - e^{-kt}). \tag{7}$$

Relațiile (6) și (7) reprezintă ecuațiile parametrice ale traiectoriei.

2.6. Legi de conservare. Ciocniri

2.6.1. Deoarece nu avem frecări,

$$\frac{mv^2}{2} = \frac{k}{2}(\Delta x_1^2 - \Delta x_0^2 + \Delta x_2^2 + \Delta x_3^2), \tag{1}$$

unde $\Delta x_{1,2,3}$ sînt deformările celor trei resorturi, Δx_0 este deformarea resortului vertical cînd corpul se află în poziția de echilibru. Dar $\Delta x_1^2 - \Delta x_0^2 = d^2 + 2l_0(l - \sqrt{l^2 + d^2})$ și $\Delta x_2^2 = \Delta x_3^2 = d^2$. Înlocuind în (1) obținem:

$$v = \sqrt{\frac{k}{m}[3d^2 + 2l_0(l - \sqrt{l^2 + d^2})]}.$$

2.6.2. Din legea de conservare a energiei obținem: $mg\,(h + x) = \frac{kx^2}{2}$, unde $k = \frac{mg}{x_0}$. Introducînd pe k în legea de conservare a energiei, obținem următoarea ecuație pentru x: $x^2 - 2x_0x - 2x_0h = 0$. Soluția va fi $(x > x_0)$:

$$x = x_0 + \sqrt{x_0^2 + 2x_0h} \simeq 22{,}1 \text{ cm}.$$

2.6.3. *a*) Corpul va părăsi suprafața pe care se mișcă în momentul în care forța centrifugă de inerție egalează componenta pe direcția razei R (componenta normală) a greutății:

$$\frac{mv^2}{R} = mg \cos \varphi. \tag{1}$$

Valoarea vitezei în acest moment o aflăm din legea de conservare a energiei:

$$mgR + \frac{mv_0^2}{2} = mgR \cos \varphi + \frac{mv^2}{2}. \tag{2}$$

Eliminînd pe v din (1) și (2) obținem:

$$\varphi = \arccos\left(\frac{2}{3} + \frac{v_0^2}{3gR}\right). \tag{3}$$

b) Pentru $\varphi = 0$, rezultă din (3):

$$1 = \frac{2}{3} + \frac{v_0^2}{3gR},$$

de unde $v_0 \geqslant gR$.

2.6.4. *a*) Pentru a nu părăsi traiectoria în punctul cel mai înalt al buclei A, trebuie ca forța de greutate să fie egală cu forța centrifugă de inerție:

$$\frac{mv_A^2}{R} = mg. \tag{1}$$

Din legea de conservare a energiei avem:

$$mgH = mg\,2R + \frac{mv_A^2}{2}. \tag{2}$$

Eliminînd v_A din (1) și (2), obținem $H = \frac{5}{2} R$.

b) Dacă $H = R$, corpul va ajunge în B, unde viteza lui va fi zero și va începe să se miște înapoi pe bucla circulară spre punctul C. Dacă $R < H < 2{,}5\,R$, corpul se va desprinde de bucla circulară într-un punct (de exemplu, D) și se va mișca după o traiectorie ce are forma unei parabole în sistemul de coordonate xOy.

2.6.5. Corpul se va detașa de platan în momentul cînd se află la distanța l_0 față de punctul de fixare al resortului, unde l_0 este lungimea resortului cînd asupra lui nu acționează forța F (fig. 2.6.5R). Notînd cu v viteza corpului în acest moment, avem din legea de conservare a energiei

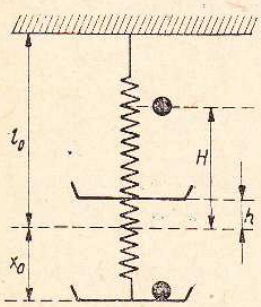


Fig. 2.6.5 R

$$H = \frac{v^2}{2g}. \tag{1}$$

Pentru a-l afla pe v^2, scriem legea de conservare a energiei în mișcarea premergătoare detașării corpului de platan:

$$\frac{kx_0^2}{2} - (M + m)\, g x_0 = \frac{(M + m)\, v^2}{2}. \tag{2}$$

Valoarea deformării x_0 se obține din condiția de echilibru:

$$(M + m)\, g + F = k x_0. \tag{3}$$

Rezolvînd sistemul (1), (2) și (3), obținem:

$$H = \frac{F^2 - (M + m)^2 g^2}{2k(M + m)\, g}. \tag{4}$$

Pentru a-l afla pe h avem:

$$\frac{Mv^2}{2} = Mgh + \frac{kh^2}{2}. \tag{5}$$

Din (5), folosind (1) și (4) obținem, dacă avem în vedere că $h > 0$,

$$h = -\frac{Mg}{k} + \sqrt{\frac{M^2 g^2}{k^2} + \frac{Mg[F^2 - (M + m)^2 g^2]}{k^2 (M + m)\, g}}.$$

2.6.6. *a*) $\operatorname{tg} \alpha = \frac{m}{2\mu M}$, $v_0 = \sqrt{\frac{lg}{\frac{m^2 \cos^2 \alpha}{2M^2 \mu} + \sin^2 \alpha}}$.

b) $l'' = \frac{m^2 v_0^2 \cos^2 \alpha}{2\mu g (M + m)^2}$.

Evident, capătul căruciorului se va afla la distanța $l' - l''$ față de poziția sa inițială (fig. 2.6.6R).

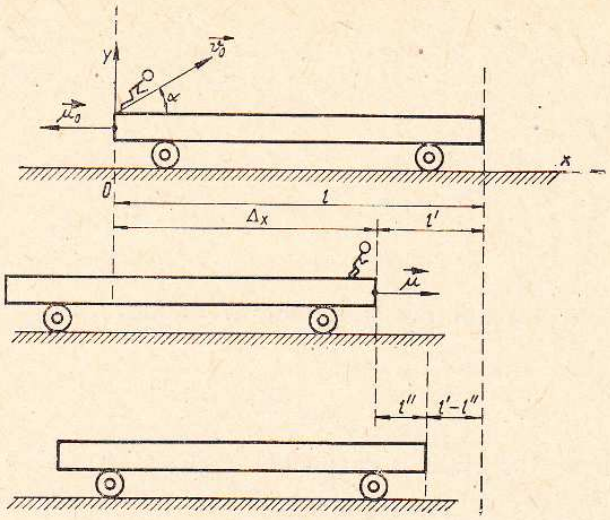


Fig. 2.6.6 R

2.6.7. Energia potențială a particulei variază numai în planul de separare a celor două semispații, în direcție perpendiculară pe acest plan. Aceasta înseamnă că forța care acționează asupra particulei este diferită de zero numai în planul de separare și este perpendiculară pe plan. Orientăm sistemul de referință cartezian $Oxyz$ astfel încît planul yOz să fie cuprins în planul de separare (planul barierei de potențial), iar axa Ox este perpendiculară pe acest plan. Deoarece proiecțiile forței, ce acționează asupra particulei, pe axele Oy și Oz sînt egale cu zero, componentele pe aceste axe ale impulsului particulei se conservă la trecerea peste bariera de potențial; astfel avem: $mv'_y = mv_y$, $mv'_z = mv_z$ (accentul se referă la mișcarea în semispațiul în care energia potențială este E'_p). Simplificînd prin m, obținem:

$$v'_y = v_y; \quad v'_z = v_z. \tag{1}$$

Din legea de conservare a energiei avem:

$$\frac{m(v')^2}{2} + E'_p = \frac{mv^2}{2} + E_p \tag{2}$$

sau

$$\frac{m}{2}(v'^2_x + v'^2_y + v'^2_z) + E'_p = \frac{m}{2}(v^2_x + v^2_y + v^2_z) + E_p. \tag{3}$$

Folosind (1), relația (3) devine:

$$v'^2_x = v^2_x + \frac{2}{m}(E_p - E'_p). \tag{4}$$

Relațiile (1), (2) și (4) ne permit să determinăm cosinușii directori α', β', γ' și viteza v' după trecerea peste bariera de potențial. Din (1) și (4) avem:

$$\cos\beta' = \frac{v}{v'}\cos\beta,\ \cos\gamma' = \frac{v}{v'}\cos\gamma,\ \cos\alpha' = \frac{v}{v'}\left[\cos^2\alpha + \frac{2}{mv^2}(E_p - E_p')\right]^{1/2},$$

unde

$$v' = v\left[1 + \frac{2}{mv^2}(E_p - E_p')\right]^{1/2}$$

se obține din (2).

Se observă că soluția obținută este adevărată dacă

$$\cos^2\alpha > \frac{2}{mv^2}(E_p - E_p').$$

în caz contrar are loc reflexia particulei de către bariera de potențial.

2.6.8. Alegem axa Ox în lungul direcției de mișcare, avînd sensul pozitiv în sensul mișcării (fig. 2.6.8R).

$$Q = \frac{1}{2}\,\frac{m_1 m_2 (v_1 - v_2)^2}{m_1 + m_2} = 12\ \text{J}.$$

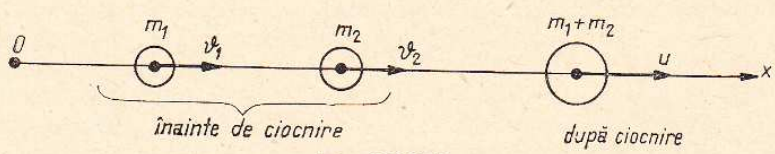


Fig. 2.6.8 R

2.6.9. După ciocnirea perfect neelastică, corpurile se mișcă împreună cu viteza u. Schematic, ciocnirea este reprezentată în figura 2.6.9.R. Din legile de conservare avem:

$$m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2 = (m_1 + m_2)\,\vec{u} \qquad (1)$$

și

$$\frac{m_1 v_1^2}{2} + \frac{m_2 v_2^2}{2} = \frac{(m_1 + m_2)\,u^2}{2} + Q. \qquad (2)$$

Valoarea impulsului după ciocnire se obține din triunghiul impulsurilor:

$$[(m_1 + m_2)\,u]^2 = m_1^2 v_1^2 + m_2^2 v_2^2 - 2m_1 v_1 m_2 v_2 \cos(\pi - \alpha) \qquad (3)$$

Din (3) exprimăm pe u^2 pe care îl introducem în (2) și obținem:

$$Q = \frac{m_1 m_2 [v_1^2 + v_2^2 + 2v_1 v_2 \cos(180 - \alpha)]}{2(m_1 + m_2)}.$$

Dacă $\alpha = 0$ (corpurile se mișcă în același sens), obținem soluția problemei precedente. Dacă $\alpha = \pi$ (corpurile se mișcă unul spre celălalt), obținem

$$Q = \frac{1}{2} \frac{m_1 m_2 (v_1 + v_2)^2}{m_1 + m_2}.$$

Dacă $\alpha = \pi/2$, $Q = \dfrac{m_1 m_2 (v_1^2 + v_2^2)}{2(m_1 + m_2)}$.

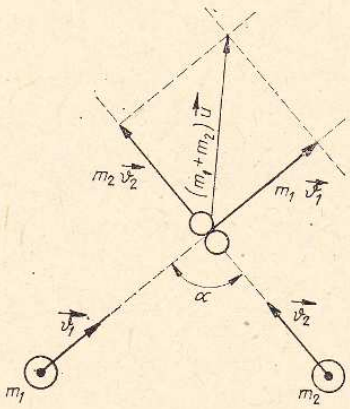


Fig. 2.6.9 R

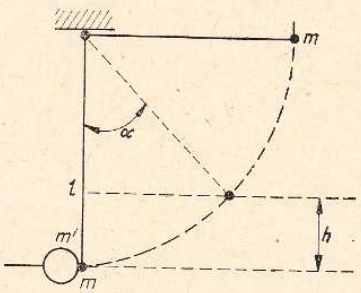


Fig. 2.6.10 R

2.6.10. *a*) Legile de conservare a impulsului și energiei sînt: $mv = mu + 2mu'$; $mv^2 = mu^2 + 2mu'^2$ (fig. 2.6.10 R).

După transformări simple avem: $v - u = 2u'$ și $v + u = u'$. Rezolvînd acest sistem obținem: $u' = \dfrac{2}{3} v = \dfrac{2}{3}\sqrt{2gl}$, iar $u = -\dfrac{1}{3}\sqrt{2gl}$.

b) Din legea de conservare a energiei, avem:

$$\frac{mu^2}{2} = mgh \text{ sau } \frac{u^2}{2} = gl(1 - \cos\alpha).$$

Folosind valoarea pentru u, calculată mai sus, obținem:

$$\cos\alpha = \frac{8}{9} \text{ sau } \alpha = \arccos\frac{8}{9}.$$

2.6.11. Prin definiție, $k = \dfrac{u_1 - u_2}{v_2 - v_1}$, unde $u_{1,2}$ sînt vitezele celor două corpuri după ciocnire, iar $v_{1,2}$ — vitezele lor înainte de ciocnire. În cazul dat, $k = -\dfrac{u_1}{v_1}$, adică $u_1 = -kv_1$. Dar $v_1 = \sqrt{2gh_1}$. În punctul cel mai înalt atins după ciocnire (h_2), viteza sferei se anulează, deci $u_1 = \sqrt{2gh_2}$. După înlocuirile corespunzătoare avem:

$h_1 = \dfrac{h_2}{k_2} = \dfrac{0{,}64\,\text{m}}{(0{,}8)^2} = 1$ m. Se observă, exprimînd pe k din relația precedentă, că $k = \dfrac{\sqrt{h_2}}{\sqrt{h_1}}$. Această relație permite determinarea experimentală a lui k.

2.6.12. *a*) $u_1 = -kv_1$ (notațiile sînt cele din problema 2.6.11) și $h_1 = k^2h_0 = 0{,}5$ m.

b) $Q_1 = E_1 - E_2 = mg(h_0 - h_1) = mgh_0(1 - k^2) = 1{,}5$ J.

c) $T_1 = t_0 + t_1$, unde t_0 este timpul de cădere de la h_0 pînă la podea, t_1 este timpul de ridicare pînă la h_1. Dar $t_0 = \sqrt{\frac{2h_0}{g}}$ și $t_1 = \sqrt{\frac{2h_1}{g}}$, deci folosind și rezultatul de la *a*) avem:

$$T_1 = \sqrt{\frac{2h_0}{g}} + \sqrt{\frac{2h_1}{g}} = \sqrt{\frac{2h_0}{g}}\,(1 + k).$$

d) Făcînd raționamentul analog ca la *a*), pentru ciocnirile succesive obținem: $h_1 = k^2h_0$; $h_2 = k^2h_1 = k^4h_0$, $h_3 = k^2h_2 = k^4h_1 = k^6h_0$, ..., $h_n = k^{2n}h_0$.

$$Q_n = E_1 - E_n = mg(h_0 - h_n) = mgh_0(1 - k^{2n}),$$

$T_n = t_0 + 2t_1 + 2t_2 + \ldots + t_n$ sau $T_n = \sqrt{\frac{2h_0}{g}}\,(1 + 2k + 2k^2 + 2k^3 + \ldots + k^n)$.

Sau grupînd convenabil termenii în paranteză:

$$T_n = \sqrt{\frac{2h_0}{g}}\,\frac{(1 - k^n)\,(1 + k)}{1 - k}.$$

2.6.13. *a*) În ciocnirea perfect elastică se conservă și impulsul sistemului și energia cinetică. Legile de conservare se scriu:

$$m_1v_1 = m_1u_1 + m_2u_2, \tag{1}$$

$$m_1v_1^2 = m_1u_1^2 + m_2u_2^2. \tag{2}$$

Din definiție, $K_1 = \frac{E_{c1} - E'_{c1}}{E_{c1}} = \frac{E'_{c2}}{E_{c1}} = \frac{m_2}{m_1}\left(\frac{u_2}{v_1}\right)^2$, unde cu accent am notat energiile cinetice după ciocnire. Pentru a-l afla pe K trebuie exprimat raportul $x = \frac{u_2}{v_1}$ din ecuațiile (1) și (2). Pentru aceasta, împărțim (1) prin m_1v_1 și (2) prin $m_1v_1^2$; obținem:

$$\begin{aligned} 1 &= \frac{u_1}{v_1} + \frac{m_2}{m_1}\frac{u_2}{v_1}, \\ 1 &= \left(\frac{u_1}{v_1}\right)^2 + \frac{m_2}{m_1}\left(\frac{u_2}{v_1}\right)^2; \end{aligned} \tag{3}$$

dacă notăm raportul $\frac{u_1}{v_1} = y$, sistemul (3) devine:

$$1 = y + \frac{m_2}{m_1}x; \qquad 1 = y^2 + \frac{m_2}{m_1}x^2. \tag{4}$$

Rezolvînd (4) obținem $x = \dfrac{2m_1}{m_1 + m_2}$, cu care obținem expresia căutată: $K_1 = \dfrac{4m_1m_2}{(m_1 + m_2)^2}$.

b) În cazul ciocnirii neelastice, viteza comună după ciocnire este:

$$u = \frac{m_1v_1}{m_1 + m_2}, \tag{1}$$

iar $K_2 = \dfrac{E'_{c2}}{E_{c1}} = \dfrac{m_2}{m_1}\left(\dfrac{u}{v_1}\right)^2$. Raportul $\dfrac{u}{v_1}$ îl exprimăm din (1) și îl înlocuim în K_2; obținem: $K_2 = \dfrac{m_1m_2}{(m_1 + m_2)^2}$.

c) $Q = E_{c\,inițial} - E_{c\,final} = \dfrac{m_1v_1^2}{2} - \dfrac{u^2}{2}(m_1 + m_2)$,

$$K' = \frac{Q}{E_{c1}} = \frac{m_2}{m_1 + m_2}.$$

d) Dacă $m_1 = m_2$: $K_1 = 100\,\%$, $K_2 = 25\,\%$, $K' = 50\,\%$.
Dacă $m_2 = 9m_1$: $K_1 = 36\,\%$, $K_2 = 9\,\%$, $K' = 90\,\%$.
Dacă $m_2 \to \infty$: $K_1 = 0$, $K_2 = 0$, $K' = 100\,\%$.

2.6.14. *a)* $u_2 = \lim\limits_{M\to\infty}\left(\dfrac{2m_1}{M + m_1}v_1 + \dfrac{M - m_1}{M + m_1}v_2\right) = v_2 = 1$ m/s. Avînd pe u_2, aflăm pe $u_1 = 2v_2 - v_1 = -1$ m/s.

b) $\Delta E_c = E_{c2} - E_{c1} = \dfrac{m_1u_1^2}{2} - \dfrac{m_1v_1^2}{2} = +2m_1v_2(v_2 - v_1)$, $\Delta E_c = -8$ J.

$$\Delta p = p_2 - p_1 = m_1u_1 - m_1v_1 = 2m_1(v_2 - v_1) = -8 \text{ kg} \cdot \text{m/s}.$$

c) Condiția opririi corpului este $u_1 = 0$; dar $u_1 = 2v_2 - v_1$, de unde $\dfrac{v_1}{v_2} = 2$.

2.6.15. *a)*

$$v'_1 = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2}v_1, \quad v'_2 = \frac{2m_1}{m_1 + m_2}v_1. \tag{1}$$

Dar $v_1 = \sqrt{2gh_1}$, $v'_1 = \sqrt{2gh'_1}$ și $v'_2 = \sqrt{2gh'_2}$. Înlocuind aceste expresii în (1) obținem:

$$h'_1 = \left(\frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2}\right)^2 h_1, \quad h'_2 = \left(\frac{2m_1}{m_1 + m_2}\right)^2 h_1.$$

Din (1) se vede că $v'_1 > 0$ (are același sens cu v_1) dacă $m_1 > m_2$.

b) Din legea de conservare a impulsului avem:

$$v' = \frac{m_1}{m_1 + m_2}v_1. \tag{2}$$

Dar $v' = \sqrt{2gh'}$ și $v_1 = \sqrt{2gh_1}$. După înlocuiri avem:

$$h' = \left(\frac{m_1}{m_1 + m_2}\right)^2 h_1.$$

$$Q = E_{c\,inițial} - E_{c\,final};\ Q = \frac{m_1 v_1^2}{2} - \frac{m_1 + m_2}{2}(v')^2 = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} g h_1.$$

c) În cazul ciocnirii perfect elastice, viteza primei bile v_1' după ciocnire este dată de (1). Dar viteza cu care bila trece prin poziția de echilibru, dacă a fost deviată sub un unghi α_1 și lăsată liberă, se obține din legea de conservare a energiei, anume $\frac{m_1 v_1^2}{2} = m_1 g l_1 (1 - \cos \alpha_1)$, deci $v_1 = \sqrt{2gl_1(1 - \cos \alpha_1)}$ și $v' = \sqrt{2gl_1(1 - \cos \alpha_1')}$. Înlocuind aceste valori în v_1' dat de (3) obținem: $\sin \frac{\alpha_1'}{2} = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} \sin \frac{\alpha_1}{2}$.

Făcînd înlocuiri asemănătoare în v_2' din (1) obținem:

$$\sqrt{2gl_2(1 - \cos \alpha_2')} = \frac{2m_1}{m_1 + m_2} \sqrt{2gl_1(1 - \cos \alpha_1)}$$

sau

$$\sin \frac{\alpha_2'}{2} = \frac{2m_1}{m_1 + m_2} \sin \frac{\alpha_1}{2} \sqrt{\frac{l_1}{l_2}}.$$

d) Din (2) avem:

$$\sin \frac{\alpha'}{2} = \frac{m_1}{m_1 + m_2} \sqrt{\frac{l_1}{\inf\{l_1, l_2\}}} \sin \frac{\alpha_1}{2}.$$

$$Q = \frac{m_1 m_2}{2(m_1 + m_2)} v_1^2 = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} g l_1 (1 - \cos \alpha_1).$$

Capitolul 3

MECANICA SOLIDULUI RIGID

3.1. Cinematica rigidului. Mișcarea generală

3.1.1. Notînd cu $\vec{e}$ versorul dreptei considerate și alegînd polul într-un punct A al dreptei, avem:

$$\overrightarrow{AP} = \lambda\vec{e},\ \vec{v} = \vec{v}_0 + \vec{\omega}\times\lambda\vec{e},$$

de unde componenta vitezei pe direcția dreptei:

$$\vec{e}\,\vec{v} = \vec{e}\,\vec{v}_0 + \vec{e}\,(\vec{\omega}\times\lambda\vec{e}) = \vec{e}\,\vec{v}_0,$$

produsul mixt fiind nul (conține doi vectori paraleli).

3.1.2. Proiecția vitezei oricărui punct pe axa de rotație dă componenta longitudinală a translației, deci în cazul axei elicoidale dă întreaga translație: $v_0 = v\cos\alpha$. Cealaltă componentă a vitezei, $v\sin\alpha$, este dată de rotație, deci $v\sin\alpha = \omega R$, de unde $\omega = \dfrac{v}{R}\sin\alpha$.

3.1.3. Viteza de translație $\vec{v}_0(\|\vec{\omega})$ și viteza de rotație $\vec{\omega}\times\vec{R}(\perp\vec{\omega})$, fiind perpendiculare între ele, avem:

$$v = \sqrt{v_0^2 + \omega^2R^2} = nv_0,\ R = \frac{v_0}{\omega}\sqrt{n^2 - 1}.$$

Locul geometric este un cilindru circular de rază R în jurul axei elicoidale.

3.1.4. În timpul $T = 2\pi/\omega$, șurubul face o rotație și înaintează cu pasul $h = 2\pi R\ \mathrm{ctg}\ \alpha$, deci $v = h/T = \omega R\ \mathrm{ctg}\ \alpha$.

3.1.5. Scriind $\vec{v}_i = \vec{v}_0 + \vec{\omega}\times\vec{r}_i', i = 1,2,3$, calculăm produsul vectorial $(\vec{v}_1 - \vec{v}_2)\times(\vec{v}_2 - \vec{v}_3)$, ținînd seama de dezvoltarea dublului produs vectorial:

$$\vec{a}\times(\vec{b}\times\vec{c}) = \vec{b}(\vec{a}\,\vec{c}) - \vec{c}(\vec{a}\,\vec{b})$$

și de simetria produsului mixt:

$$(\vec{a},\ \vec{b},\ \vec{c}) = \vec{a}(\vec{b}\times\vec{c}) = \vec{b}(\vec{c}\times\vec{a}) = \vec{c}(\vec{a}\times\vec{b}).$$

Găsim

$$\vec{N} = \vec{v}_1\times\vec{v}_2 + \vec{v}_2\times\vec{v}_3 + \vec{v}_3\times\vec{v}_1 = \vec{\omega}\,[\vec{\omega}(\vec{r}_1'\times\vec{r}_2' + \vec{r}_2'\times\vec{r}_3' + \vec{r}_3'\times\vec{r}_1')],$$

deci $\vec{\omega}$ este paralel cu $\vec{N}$.

Calculînd produsul mixt al vitezelor:

$$(\vec{v}_1,\ \vec{v}_2,\ \vec{v}_3) = (\vec{\omega}\vec{v}_0)\,[\vec{\omega}(\vec{r}_1'\times\vec{r}_2' + \vec{r}_2'\times\vec{r}_3' + \vec{r}_3'\times\vec{r}_1')] = N\vec{v}_0,$$

rezultă $(\vec{\omega}\vec{v}_0 = \omega v_{0\parallel})$:

$$v_{0\parallel} = \frac{1}{N}(\vec{v}_1,\ \vec{v}_2,\ \vec{v}_3),\ (N = \vec{N}\vec{\omega}/\omega).$$

Interpretarea geometrică (fig. 3.1.5): dintr-un punct arbitrar ducem vitezele $\vec{v}_{1,\,2,\,3}$, atunci $\vec{N}$, deci și $\vec{\omega}$ este normal pe planul care trece prin vîrfurile acestor viteze. Dacă pe acest plan proiectăm pozițiile și vitezele a două puncte, atunci dreptele duse prin proiecțiile pozițiilor, perpendicular pe proiecțiile vitezelor, se vor intersecta pe axa elicoidală.

3.1.6. Mișcarea discului este o rostogolire a conului cu vîrful în O sprijinit solidar pe disc (axoida mobilă) peste conul cu vîrful în O sprijinit pe circumferința orizontală (axoida fixă). Axa elicoidală este generatoarea de contact OA a celor două conuri. Centrul discului C se mișcă cu viteza ΩR, conform enunțului problemei și pe de altă parte, — punctul A fiind în repaus momentan, — cu viteza $\omega_0 r$, unde ω_0 este viteza unghiulară proprie de rotație. Viteza unghiulară instantanee va fi:

$$\omega = \sqrt{\Omega^2 + \omega_0^2} = \Omega\sqrt{1 + R^2/r^2},\ \vec{\omega} = \vec{\omega}_0 + \vec{\Omega},\ \vec{\omega}\parallel\overrightarrow{OA}.$$

Alegem axele $Oxyz$ ca în figura 3.1.6. Atunci evident

$$\vec{\varepsilon} = \dot{\vec{\omega}} = \dot{\vec{\omega}}_0 = \vec{\Omega}\times\vec{\omega} = \vec{\Omega}\times\vec{\omega}_0 = \vec{i}\,\Omega\omega_0 = \vec{i}\,\Omega^2\frac{R}{r},$$

$$\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{CP} = \vec{i}r\sin\theta + \vec{j}R - \vec{k}r\cos\theta,$$

deci accelerația rotitoare (se află în planul Oyz):

$$\vec{a}_\varepsilon = \vec{\varepsilon}\times\overrightarrow{OP} = -\vec{j}\Omega^2 R\cos\theta + \vec{k}\Omega^2\frac{R^2}{r},\ a_\varepsilon = \Omega^2 R\sqrt{\cos^2\theta + R^2/r^2}.$$

Accelerația axipetă este $\vec{a}_\omega = \omega^2\overrightarrow{PQ}$, unde distanța PQ a punctului P pînă la axa instantanee OA este

$$PQ = \left|\overrightarrow{OP}\times\frac{\vec{\omega}}{\omega}\right|,\ \frac{\vec{\omega}}{\omega} = \frac{1}{\sqrt{R^2 + r^2}}(\vec{j}R - \vec{k}r),$$

$$\overrightarrow{OP}\times\frac{\vec{\omega}}{\omega} = \frac{rR}{\sqrt{R^2 + r^2}}\left(\cos\theta - 1,\ \frac{r}{R}\sin\theta,\ \sin\theta\right),$$

$$PQ = \frac{2r}{\sqrt{1 + R^2/r^2}}\sin\frac{\theta}{2}\cdot\sqrt{\cos^2\theta/2 + R^2/r^2},$$

$$a_\omega = \omega^2 PQ = 2\Omega^2 r\sin\frac{\theta}{2}\cdot\sqrt{1 + R^2/r^2}\cdot\sqrt{\cos^2\theta/2 + R^2/r^2}.$$

3.1.7. Transcriem formulele lui Frénet în forma (3.2), punînd $ds = v\,dt$:

$$\dot{\vec{t}} = \frac{\vec{n}v}{R} = \omega_b\vec{n} - \omega_n\vec{b},\ \dot{\vec{n}} = v\left(-\frac{\vec{t}}{R} + \frac{\vec{b}}{T}\right) = -\omega_b\vec{t} + \omega_t\vec{b},$$

$$\dot{\vec{b}} = -\frac{\vec{n}v}{T} = \omega_n\vec{t} - \omega_t\vec{n},$$

de unde rezultă:

$$\vec{\omega} = \vec{t}\,\omega_t + \vec{n}\omega_n + \vec{b}\,\omega_b = v\left(\frac{\vec{t}}{T} + \frac{\vec{b}}{R}\right).$$

Translația elicoidală este proiecția vitezei $\vec{v} = v\vec{t}$ pe axa de rotație:

$$v_0 = \vec{v}\,\frac{\vec{\omega}}{\omega} = v\vec{t}\cdot\left(\frac{\vec{t}}{T} + \frac{\vec{b}}{R}\right)\frac{RT}{\sqrt{R^2+T^2}} = \frac{vR}{\sqrt{R^2+T^2}}.$$

Un punct al axei elicoidale este dat de (3.4) ($\vec{b}\times\vec{t} = \vec{n}$):

$$\overrightarrow{PH} = \frac{1}{\omega^2}\vec{\omega}\times\vec{v} = \frac{R^2T^2}{R^2+T^2}\left(\frac{\vec{t}}{T} + \frac{\vec{b}}{R}\right)\times\vec{t} = \frac{\vec{n}R}{1 + R^2/T^2}.$$

3.2. Mișcarea plan-paralelă

3.2.1. 1) $v_1\cos\alpha_1 = v_2\cos\alpha_2$, $v_2 = v_1\dfrac{\cos\alpha_1}{\cos\alpha_2}$;

2) $\vec{v}_2 = \vec{v}_1 + \vec{\omega}\times\overrightarrow{A_1A_2}$, deci $\vec{v}_2 - \vec{v}_1$ este perpendicular pe $\overrightarrow{A_1A_2}$,

$$v_2\sin\alpha_2 - v_1\sin\alpha_1 = \omega l,\ \omega = \frac{v_1}{l}\frac{\sin(\alpha_2-\alpha_1)}{\cos\alpha_2}.$$

3) Intersecția perpendicularelor ridicate în $A_{1,2}$ pe vitezele $\vec{v}_{1,2}$ dă centrul vitezelor C:

$$v_1 = \omega A_1C,\ A_1C = \frac{l\cos\alpha_2}{\sin(\alpha_2-\alpha_1)}.$$

3.2.2. Din expresia vitezei (3.3)

$$\vec{v} = \vec{v}_0 + \vec{\omega}\times\vec{r}', \tag{3.3}$$

punînd condiția $\vec{v} = 0$ (pentru C) și înmulțind vectorial la stînga cu $\vec{\omega}$ rezultă:

$$0 = \vec{\omega}\times\vec{v}_0 + \vec{\omega}\times(\vec{\omega}\times\vec{r}') = \vec{\omega}\times\vec{v}_0 - \vec{r}'\omega^2,\ (\vec{\omega}\vec{r}' = 0).$$

Din expresia accelerației (3.7):

$$\vec{a} = \vec{a}_0 + \vec{\varepsilon}\times\vec{r}' - \omega^2\vec{r}', \tag{3.7}$$

punînd condiția $\vec{a} = 0$ (pentru W) și înmulțind vectorial la stînga cu $\vec{\varepsilon}$, găsim:

$$0 = \vec{\varepsilon} \times \vec{a}_0 + \vec{\varepsilon} \times (\vec{\varepsilon} \times \vec{r}') - \omega^2 \vec{\varepsilon} \times \vec{r}',$$

unde $\vec{\varepsilon} \times \vec{a}_0 = 0 (\vec{\varepsilon} \perp \vec{a}_0)$, $\vec{\varepsilon} \times (\vec{\varepsilon} \times \vec{r}') = \vec{\varepsilon}(\vec{\varepsilon}\vec{r}') - \vec{r}'\varepsilon^2$, $\vec{\varepsilon}\vec{r}' = 0 (\vec{\varepsilon} \perp \vec{r}')$ și substituind $\vec{\varepsilon} \times \vec{r}'$ din (3.7), rezultă formula cerută. Ridicînd-o la pătrat (scalar), rezultă imediat r_w, iar tg β este raportul catetelor $\varepsilon a_0 : \omega^2 a_0$.

3.2.3. 1) Luînd pe A_1 drept pol avem, conform lui (3.7):

$$\vec{a}_2 = \vec{a}_1 + \vec{\varepsilon} \times \overrightarrow{A_1A_2} - \omega^2 \overrightarrow{A_1A_2}.$$

Proiectînd această relație pe direcția $\overrightarrow{A_1A_2}$:

$$a_2 \cos \alpha_2 = a_1 \cos \alpha_1 - \omega^2 l, \omega^2 = \frac{1}{l} (a_1 \cos \alpha_1 - a_2 \cos \alpha_2),$$

(trebuie ca $a_1 \cos \alpha_1 \geqslant a_2 \cos \alpha_2$).

2) Proiectăm relația inițială pe o direcție perpendiculară pe A_1A_2:

$$a_2 \sin \alpha_2 = a_1 \sin \alpha_1 + \varepsilon l, \quad \varepsilon = \frac{1}{l} (a_2 \sin \alpha_2 - a_1 \sin \alpha_1).$$

3) $A_1W = \dfrac{a_1}{\sqrt{\omega^4 + \varepsilon^2}} = \dfrac{a_1 l}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2 - 2a_1a_2 \cos (\alpha_2 - \alpha_1)}}$, $\operatorname{tg} \beta = \dfrac{\varepsilon}{\omega^2}$, acce-

lerațiile $\vec{a}_{1,2}$ fac același unghi β cu direcțiile $\overline{A_{1,2}W}$, la fel ca și $(\vec{a}_2 - \vec{a}_1)$ cu direcția $\overline{A_2A_1}$.

3.2.4. 1) Vitezele capetelor A, B sînt de-a lungul axelor, deci ridicînd în A, B perpendiculare pe viteze, găsim centrul C.

2) Centrul C este la distanța l = const de origine, deci baza este cercul de rază l cu centrul în origine. Față de tijă, C este situat mereu pe semicercul ACB, deci rostogolirea este cercul de diametru AB, legat solidar cu AB.

3) Dacă $\varepsilon = 0$, rezultă $\vec{r}'_g = \vec{a}_0/\omega^2$. Considerînd polul în A, B, accelerațiile $\vec{a}_{1,2}$ sînt de-a lungul axelor, deci centrul geometric G trebuie să fie la intersecția lor, adică, în originea O.

3.2.5. 1) $\vec{v}_C \perp \overline{BC}$, $\vec{v}_D \perp \overline{AD}$, deci centrul vitezelor este la intersecția dreptelor BC și AD, adică în K.

2) $\Delta ABC = \Delta CDA$ avînd laturile egale, deci $\sphericalangle ABK = \sphericalangle CDK$; $\Delta ABK = \Delta CDK$ avînd o latură egală și unghiuri egale, deci $KB = KD$.

În cazul $a < b$ avem: $AK + KB = 2b$, la fel $CK + KD = 2b$, deci K se află pe o elipsă fixă (baza) cu focarele în A, B, respectiv, mobilă (rostogolitoarea) cu focarele în C, D. Semiaxele sînt: $b, \sqrt{b^2 - a^2}$.

În cazul $a > b$ avem: $AK - KB = 2b$, la fel $CK - KD = 2b$, deci K se află pe o hiperbolă fixă (bază) cu focarele în A, B, respectiv, mobilă (rostogolitoare) cu focarele în C, D. Semiaxele sînt: $b, \sqrt{a^2 - b^2}$.

3.2.6. 1) $\vec{v}_A \perp \overline{OA}$, $\vec{v}_B \parallel Ox$, deci C se află la intersecția lui OA cu perpendiculara în B pe Ox.

2) $y_A = a \sin \Omega t = b \sin \psi$, $\dot{y}_A = a\Omega \cos \Omega t = b\dot{\psi} \cos \psi$, $\omega = \dot{\psi} =$

$$= \Omega \frac{a}{b} \frac{\cos \Omega t}{\cos \psi} = -\Omega \frac{a \cos \Omega t}{\sqrt{b^2 - a^2 \sin^2 \Omega t}}.$$

3) $x_B = a \cos \Omega t - b \cos \psi$, $\dot{x}_B = -a\Omega \sin \Omega t + b\dot{\psi} \sin \psi =$

$$= -\Omega a \sin \Omega t \left(1 + \frac{a \cos \Omega t}{\sqrt{b^2 - a^2 \sin^2 \Omega t}}\right) = -\Omega \cdot \overline{OD}.$$

4) $$\varepsilon = \dot{\omega} = \frac{\Omega^2 (b^2 - a^2)\, a \sin \Omega t}{(b^2 - a^2 \sin^2 \Omega t)^{3/2}}.$$

3.2.7. 1) Luînd pe C drept pol, avem:

$$\vec{v} = \vec{\omega} \times \overrightarrow{CP} = \vec{\omega} \times (\vec{r} - \vec{r}_c),$$

de unde

$$\vec{a} = \dot{\vec{v}} = \vec{\varepsilon} \times \overrightarrow{CP} + \vec{\omega} \times (\dot{\vec{r}} - \dot{\vec{r}}_c) = \vec{\varepsilon} \times \overrightarrow{CP} + \vec{\omega} \times \vec{v} - \vec{\omega} \times \vec{u}_c =$$

$$= \vec{\varepsilon} \times \overrightarrow{CP} + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \overrightarrow{CP}) - \vec{\omega} \times \vec{u}_c = \vec{\varepsilon} \times \overrightarrow{CP} - \omega^2 \overrightarrow{CP} - \vec{\omega} \times \vec{u}_c,$$

deci $\vec{a}_{c'} = -\vec{\omega} \times \vec{u}_c$, fiind îndreptată după normala comună în C la centroide.

2) Deoarece $\vec{v}_{c'} = 0$, acceleraţia normală este nulă şi $\vec{a}_{c'}$ este acceleraţia tangenţială, deci traiectoria lui C' este tangentă în C la normala comună a centroidelor, avînd acolo un punct de întoarcere.

3) Punînd în formula de mai sus condiţia $\vec{a} = 0$ şi $\vec{\varepsilon} = 0$, obţinem poziţia centrului geometric al acceleraţiilor G:

$$0 = -\omega^2 \overrightarrow{CG} - \vec{\omega} \times \vec{u}_c, \quad \overrightarrow{CG} = -\frac{\vec{\omega} \times \vec{u}_c}{\omega^2} = \frac{\vec{a}_{c'}}{\omega^2},$$

$$\vec{a}_{c'} = \omega^2 \overrightarrow{CG}, \quad a_{c'} = \omega u_c; \quad u_c = \omega \cdot CG, \quad \vec{u}_c = \vec{\omega} \times \overrightarrow{CG}.$$

3.2.8. 1) Acceleraţia unui punct P este, conform problemei precedente,

$$\vec{a} = -\vec{\omega} \times \vec{u}_c + \vec{\varepsilon} \times \overrightarrow{CP} - \omega^2 \overrightarrow{CP}; \quad -\vec{\omega} \times \vec{u}_c = \omega^2 \overrightarrow{CG};$$

ea trebuie să fie tangenţială, deci paralelă cu viteza, deci perpendiculară pe CP;

$$\vec{a} \overrightarrow{CP} = \omega^2 \overrightarrow{CG} \cdot \overrightarrow{CP} - \omega^2 \overrightarrow{CP}^2 = 0, \quad (\overrightarrow{CP} \neq 0),$$

ceea ce ne arată (teorema catetei) că P se află pe cercul construit pe CG ca diametru.

Alt raţionament: pe de o parte, acceleraţia oricărui punct P face unghiul $\beta = \operatorname{arc\,tg} \frac{\varepsilon}{\omega^2}$ cu raza PW (în particular, $\vec{a}_{c'} = -\vec{\omega} \times \vec{u}_c = \omega^2 \overrightarrow{CG}$ face unghiul β cu CW); pe de altă parte, acceleraţia punctelor căutate trebuie să fie perpendiculară pe CP ($a_n = 0$!). Rezultă că $\sphericalangle CPW = \frac{\pi}{2} - \beta$ este ace-

lași pentru punctele căutate, deci acestea se află pe un cerc construit pe CW, capabil de unghiul $\frac{\pi}{2} - \beta$. Pe același cerc se află și G, deoarece accelerația sa este tangențială $\vec{a}_g = \vec{\varepsilon} \times \overrightarrow{CG}$.

$$CT = CG \cdot \operatorname{ctg} \beta = \frac{u_c}{\omega} \frac{\omega^2}{\varepsilon} = \frac{\omega u_c}{\varepsilon}.$$

2) Punem condiția $a_t = 0$:

$$\vec{a} \times \overrightarrow{CP} = -(\vec{\omega} \times \vec{u}_c) \times \overrightarrow{CP} + (\vec{\varepsilon} \times \overrightarrow{CP}) \times \overrightarrow{CP} = 0,$$

$$\vec{\omega}(\vec{u}_{c'} \cdot \overrightarrow{CP}) - \vec{\varepsilon} \overrightarrow{CP^2} = 0, \quad (\vec{\omega} \,||\, \vec{\varepsilon}),$$

ceea ce ne arată (teorema catetei) că P se află pe un cerc cu diametrul în direcția lui $\vec{u}_c$, anume, $CT = \omega u_c/\varepsilon$.

Alt raționament: pe de o parte, accelerația oricărui punct P' face unghiul β cu $P'W$, pe de altă parte, accelerația trebuie să fie în direcția $P'C (a_t = 0!)$. Rezultă că $\sphericalangle CP'W = \beta$, deci P' se află pe un cerc construit pe CW, capabil de unghiul β. Distanța

$$CW = \frac{\omega u_c}{\sqrt{\omega^4 + \varepsilon^2}} = CG \cos \beta.$$

3.2.9. În timpul dt, centrul C se mută în C_1 pe bază și în C_1' pe rostogolitoare ($CC_1 = CC_1' = ds$). Normalele infinit vecine în C și C_1 (C_1') se taie în centrul de curbură K (respectiv, K'). Dreapta $C_1'K'$ se rotește în timpul dt cu unghiul $d\varphi = d\theta' \pm d\theta$ luînd direcția KC_1. Prin urmare,

$$\omega = \frac{d\varphi}{dt} = \frac{d\theta'}{dt} \pm \frac{d\theta}{dt} = \frac{ds}{dt}\left(\frac{d\theta'}{ds} + \frac{d\theta}{ds}\right) = u_c\left(\frac{1}{R'} \pm \frac{1}{R}\right),$$

ceea ce se poate scrie vectorial astfel:

$$\vec{\omega} = \vec{u}_c \times \left(\frac{\vec{n}}{R} - \frac{\vec{n}'}{R'}\right), \quad \frac{1}{CG} = \frac{1}{R'} \pm \frac{1}{R}.$$

3.2.10. 1) Baza este axa Ox, iar rostogolitoarea este cercul. Centrul vitezelor este punctul lor de contact C.

2) $u = \omega \overline{CG} = \omega R$, $\omega = u/R$, $\varepsilon = \dot{\omega} = \dot{u}/R$.

3) $x = R(\theta - \sin \theta)$, $y = R(1 - \cos \theta) = 2R \sin^2 \frac{\theta}{2}$, care reprezintă ecuațiile parametrice ale cicloidei.

4) $v_x = \dot{x} = R\theta(1 - \cos \theta) = \omega R(1 - \cos \theta) = u(1 - \cos \theta) = 2u \sin^2 \theta/2$, $v_y = \dot{y} = \omega R \sin \theta = u \sin \theta$, $v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = 2u \sin \theta/2 = \omega \cdot 2R \sin \theta/2 = \omega \cdot CP$, $\vec{v}$ este $\perp CP$, deci îndreptat spre C'.

5) $\vec{v} = \vec{u} + \vec{\omega} \times \overrightarrow{GP}$; $\vec{v}_{rot} = \vec{\omega} \times \overrightarrow{GP} = u(-\cos \theta, \sin \theta)$.

6) $\alpha = \sphericalangle PCC' = \pi/2 - \theta/2$;

7) $v' = \omega \cdot 2R$, $\vec{v}' = 2\vec{u}$.

8) $a_x = \dot{v}_x = \dot{u}(1 - \cos\theta) + \frac{1}{R}u^2 \sin\theta$, $a_y = \dot{v}_y = \dot{u}\sin\theta + \frac{1}{R}u^2\cos\theta$,

9) $\vec{a} = \vec{a}_0 + \vec{a}_\varepsilon + \vec{a}_\omega$, $\vec{a}_0 = \dot{\vec{u}} = (\dot{u}, 0)$, $\vec{a}_\varepsilon = \vec{\varepsilon}\times\overrightarrow{GP} = \dot{u}(-\cos\theta, \sin\theta)$ tangentă la cerc ($\perp GP$), $\vec{a}_\omega = -\omega^2\overrightarrow{GP} = \frac{1}{R}u^2(\sin\theta, \cos\theta)$ radială (centripetă) spre G.

10) (v. problemele 3.2.7—8), $u_c = u$, $CG = u_c/\omega = u/\omega = R$, deci în centrul cercului (dealtfel, $\frac{1}{CG} = \frac{1}{R'} \pm \frac{1}{R}$, unde $R' \to R$ și $R \to \infty$);

W se află pe cercul de diametru CG, la distanța

$$CW = CG\cos\beta = R\cos\beta, \text{ unde } \operatorname{tg}\beta = \varepsilon/\omega^2 = \dot{u}R/u^2;$$

11) a_n este perpendiculară pe $\vec{v}$, deci în direcția PC. Luînd pe C drept pol ($\vec{a}_c = \omega^2\overrightarrow{CG}$) avem:

$$\vec{a} = \omega^2\overrightarrow{CG} + \vec{\varepsilon}\times\overrightarrow{CP} - \omega^2\overrightarrow{CP},$$

deci

$$a_n = -\omega^2 R\cos\alpha + \omega^2 2R\sin\theta/2 = \omega^2 R\sin\theta/2 = \frac{u^2}{R}\sin\frac{\theta}{2};$$

de unde raza de curbură:

$$\rho = v^2/a_n = 4R\sin\theta/2 = 2CP = PK;$$

12) $ds = v\,dt = 2\omega R\sin\frac{\theta}{2}\,dt = 2\frac{d\theta}{dt}R\sin\frac{\theta}{2}\,dt = 2R\sin\frac{\theta}{2}\,d\theta$,

$$s_0 = \int_0^{2\pi} 2R\sin\frac{\theta}{2}\,d\theta = -4R\cos\frac{\theta}{2}\Big|_0^{2\pi} = 8R.$$

3.2.11. 1) $v = \frac{ds}{dt} = \frac{ds}{d\theta}\frac{d\theta}{dt} = R\dot{\theta} = \omega R$, $\omega = v/R$;

2) $v = \omega CP$, rezultă că C coincide cu centrul de curbură; locul geometric al centrelor C (baza) se numește *evoluata* curbei date.

3) $a_t = \dot{v} = \varepsilon R + \omega\dot{R}$;

4) Luînd polul în C avem:

$$\vec{a} = \vec{a}_c + \vec{\varepsilon}\times\overrightarrow{CP} - \omega^2\overrightarrow{CP}, \text{ dar } \vec{a}_n = -\omega^2\overrightarrow{CP},$$

$$\text{deci } a_t = a_c + \varepsilon R,\ a_c = \omega\dot{R}.$$

5) $a_c = \omega u_c$, $u_c = \dot{R}$.

3.3. Compunerea translațiilor și rotațiilor

3.3.1. Față de bară: $\omega_1' = -\Omega$, $\omega_{k+1}' = -\omega_k' R_k/R_{k+1}$, $\omega_n' = (-1)^n \Omega R_1/R_n$; viteza absolută:

$$\omega_n = \omega_n' + \Omega = \Omega[1 + (-1)^n R_1/R_n].$$

Pentru n par, axa momentană $\vec{\omega}_n$ este la distanța $l\dfrac{R_1}{R_1 + R_n}$ de capătul fix.

Pentru n impar — la distanța $l\dfrac{R_1}{R_1 - R_n}$. În ultimul caz, dacă $R_1 = R_n$, roata R_n are numai o mișcare de translație cu viteza $v = \Omega l$ în planul său, perpendicular pe bară (roata se rotește cu $-\Omega$ față de bară, care la rîndul ei o rotește cu Ω, deci, față de reperul fix, roata nu se rotește).

3.3.2. Se compune rotația de transport $2\pi n$ cu rotația proprie (relativă) $\pm 2\pi n R/r$, deci $\omega = 2\pi n(1 \pm R/r)$, axa momentană trecînd prin punctul de contact al roților.

3.3.3. Translația $v_0 = \omega b$ perpendiculară pe planul axelor (în sensul de înaintare al burghiului, rotit conform cuplului, $\vec{\omega}$, $-\vec{\omega}$).

3.3.4. Deplasăm vitezele unghiulare în punctul C $(0, 0, a/2)$ și le compunem acolo: $\Omega = \omega\sqrt{2}$, $\vec{\Omega}$ este paralel cu bisectoarea cadranului xOy; translația rezultantă $v = \dfrac{1}{2}\omega a\sqrt{2}$ este în sensul opus lui $\vec{\Omega}$.

3.3.5. Deplasăm vitezele în O și le compunem acolo: $\Omega = \sqrt{\omega_1^2 + \omega_2^2 + \omega_3^2}$. Translația rezultantă: $\vec{v} = (\omega_3 b - \omega_2 c, -\omega_3 a, 0)$, de unde translația longitudinală:

$$v_0 = \vec{v}\frac{\vec{\Omega}}{\Omega} = \frac{1}{\Omega}(-\omega_1\omega_2 c - \omega_2\omega_3 a + \omega_3\omega_1 b).$$

3.3.6. Axa elicoidală se va deplasa cu distanța $\dfrac{1}{\omega^2}\vec{\omega}\times\vec{v}'$, adică perpendicular pe $(\vec{\omega}, \vec{v}')$ cu distanța $\dfrac{1}{\omega}v' \sin\alpha$. Translația longitudinală: $v + v'\cos\alpha$.

3.3.7. Axoidele sînt planul paralel orizontal și conul însuși. Axa elicoidală este generatoarea de contact (h — înălțimea conului).

$$\omega_0 = \Omega\frac{h/\cos\alpha}{h\operatorname{tg}\alpha} = \frac{\Omega}{\sin\alpha}, \quad \omega = \Omega\operatorname{ctg}\alpha.$$

3.4. Momentele de inerție

3.4.1.

$$I_1 = \sum m_k y_k^2, \quad I_2 = \sum m_k x_k^2,$$

$$I_3 = \sum m_k R_k^2 = \sum m_k (x_k^2 + y_k^2) = I_1 + I_2$$

sau

$$I_1 = \int y^2 \, dm, \quad I_2 = \int x^2 \, dm,$$

$$I_3 = \int R^2 \, dm = \int (x^2 + y^2) \, dm = I_1 + I_2.$$

3.4.2. *a)* Centrul de masă se află pe axa moleculei, care este axă de simetrie:

$$l_1 = l \frac{m_2}{m_1 + m_2}, \quad l_2 = l \frac{m_1}{m_1 + m_2}.$$

Axele principale de inerție sînt: două axe perpendiculare pe axa moleculei și perpendiculare între ele, pentru care $I_1 = I_2$ din cauza simetriei și axa moleculei pentru care evident $I_3 = 0$ (fiindcă distanțele pînă la această axă sînt nule),

$$I_3 = 0, \quad I_1 = I_2 = m_1 l_1^2 + m_2 l_2^2 = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} l^2 = \mu l^2,$$

adică produsul dintre masa *redusă* a celor doi atomi și pătratul distanței dintre ei.

b) Centrul de masă se află pe înălțimea triunghiului (axă de simetrie) la distanța y_0 de bază:

$$y_0 = h \frac{m_2}{2m_1 + m_2}.$$

Axele principale de inerție sînt cele din figură:

$$I_1 = 2m_1 y_0^2 + m_2 (h - y_0)^2 = \frac{2m_1 m_2}{2m_1 + m_2} h^2,$$

$$I_2 = 2m_1 \left(\frac{a}{2}\right)^2 = \frac{1}{2} m_1 a^2,$$

$$I_3 = 2m_1 \left(\frac{a^2}{4} + y_0^2\right) + m_2 (h - y_0)^2 = I_1 + I_2.$$

Pentru mase egale ($m_1 = m_2 = m$) și triunghi echilateral $\left(h = \frac{a}{2}\sqrt{3}\right)$:

$$I_1 = I_2 = \frac{1}{2} m a^2, \quad I_3 = m a^2.$$

3.4.3. Centrul de inerție se află pe înălțimea piramidei (axă de simetrie) la distanța z_0 de bază:

$$z_0 = h\frac{m_2}{3m_1 + m_2}.$$

$$I_1 = 2m_1\left(\frac{a^2}{4} + z_0^2\right) + m_1 z_0^2 + m_2(h - z_0)^2 = \frac{1}{2}m_1 a^2 + \frac{3m_1 m_2}{3m_1 + m_2}h^2,$$

$$I_2 = 2m_1\left(\frac{a^2}{12} + z_0^2\right) + m_1\left(\frac{a^2}{3} + z_0^2\right) + m_2(h - z_0)^2 = I_1,$$

$$I_3 = 3m_1\frac{a^2}{3} = m_1 a^2.$$

Pentru mase egale, $m_1 = m_2 = m$ și tetraedru regulat ($h = a\sqrt{2/3}$):

$$I_1 = I_2 = I_3 = ma^2.$$

3.4.4. $$I = \int R^2\,dm = \int r^2 \sin^2\beta\,dm,$$

$$I_1 = \int (y^2 + z^2)\,dm = \int (r^2 - x^2)\,dm \text{ etc.}$$

Unghiul β dintre direcția OP (de cosinusuri directoare x/r, y/r, z/r) și direcția OQ (de cosinusuri directoare $\cos\alpha_{1,2,3}$) este dat de:

$$\cos\beta = \frac{x}{r}\cos\alpha_1 + \frac{y}{r}\cos\alpha_2 + \frac{z}{r}\cos\alpha_3$$

(produsul scalar al versorilor celor două direcții), astfel încît

$$r^2\sin^2\beta = r^2 - (x\cos\alpha_1 + y\cos\alpha_2 + z\cos\alpha_3)^2.$$

Prin definiție, momentele de inerție centrifugale sînt nule față de axele principale:

$$I_{xy} = I_{yx} = -\int xy\,dm = 0 \text{ etc.}$$

De asemenea, $\cos^2\alpha_1 + \cos^2\alpha_2 + \cos^2\alpha_3 = 1$, astfel încît:

$$I = \int r^2\sin^2\beta\,dm = \int [r^2(\cos^2\alpha_1 + \cos^2\alpha_2 + \cos^2\alpha_3) -$$

$$- x^2\cos^2\alpha_1 - \ldots - 2xy\cos\alpha_1\cos\alpha_2 - \ldots]\,dm =$$

$$= \int (r^2 - x^2)\cos^2\alpha_1\,dm + \ldots = I_1\cos^2\alpha_1 + \ldots$$

3.4.5. *a)* $I_1 = I_2 = \int_{-l/2}^{l/2} z^2 \, dm$, $dm = \lambda \, dz$.

(λ — densitatea liniară a tijei),

$$I_1 = I_2 = \int_{-l/2}^{l/2} \lambda z^2 \, dz = \lambda \frac{l^3}{12} = \frac{1}{12} ml^2, \; I_3 = 0.$$

b) Folosind rezultatul precedent, avem (λ — densitatea liniară):

$$I_1 = 2\left[\lambda b \cdot \frac{b^2}{12} + \lambda a \left(\frac{b}{2}\right)^2\right] = \frac{mb^2}{12} \frac{a + 3b}{a + b}$$

și schimbînd a cu b:

$$I_2 = \frac{ma^2}{12} \frac{b + 3a}{a + b}.$$

Fiind figură plană (v. problema 3.4.1): $I_3 = I_1 + I_2$.

În cazul pătratului:

$$I_1 = I_2 = \frac{1}{6} ma^2, \; I_3 = \frac{1}{3} ma^2.$$

c) Din motive de simetrie, $I_1 = I_2$ și fiind figură plană:

$$I_3 = I_1 + I_2,$$

deci

$$I_1 = I_2 = \frac{1}{2} I_3, \; I_3 = \int R^2 \, dm = R^2 \int dm = mR^2,$$

$$I_1 = I_2 = \frac{1}{2} mR^2.$$

3.4.6. Aplicînd (3.14) și teorema lui Steiner, avem (λ — densitatea liniară):

$$I_1 = 4\left[\frac{\lambda a^3}{12} \cos^2\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\alpha}{2}\right) + \lambda a \left(\frac{a}{2} \sin \frac{\alpha}{2}\right)^2\right] = \frac{1}{3} ma^2 \sin^2 \frac{\alpha}{2},$$

$$I_2 = \frac{1}{3} ma^2 \cos^2 \frac{\alpha}{2}, \; I_3 = I_1 + I_2 = \frac{1}{3} ma^2.$$

Pentru pătrat ($\alpha = 90°$) regăsim rezultatul de la problema precedentă.

3.4.7. Notăm cu σ densitatea superficială

a) $$I_1 = \int y^2 \, dm = \int y^2 \sigma \, dS = \int_{-b/2}^{b/2} y^2 \sigma a \, dy = \frac{1}{12} mb^2,$$

$$I_2 = \frac{1}{12} ma^2, \; I_3 = I_1 + I_2 = \frac{1}{12} m(a^2 + b^2).$$

În particular, pentru o tijă subțire ($b = 0$, $a = l$) regăsim rezultatul de la 3.4.5 *a*.

b) $I_3 = I_1 + I_2$ (figură plană); $I_1 = I_2$ (în virtutea simetriei):

$$I_3 = \int r^2 \, dm = \int r^2 \sigma \, dS, \; dS = r d\theta \, dr,$$

$$I_3 = \sigma \int_{R_1}^{R_2} r^3 \, dr \int_0^{2\pi} d\theta = \frac{\pi}{2} \sigma (R_2^4 - R_1^4) = \frac{1}{2} m (R_1^2 + R_2^2),$$

$$I_1 = I_2 = \frac{1}{2} I_3 = \frac{1}{4} m (R_1^2 + R_2^2).$$

În particular, pentru un disc (plin) ($R_1 = 0$, $R_2 = R$):

$$I_1 = I_2 = \frac{1}{4} mR^2, \quad I_3 = \frac{1}{2} mR^2$$

și pentru un inel subțire ($R_1 = R_2 = R$):

$$I_1 = I_2 = \frac{1}{2} mR^2, \quad I_3 = mR^2,$$

adică se regăsește rezultatul de la 3.4.5 *c*.

Invers, plecînd de la discul plin:

$$I_1 = I_2 = \frac{\pi}{4} \sigma R^4, \quad I_3 = \frac{\pi}{2} \sigma R^4,$$

regăsim rezultatul pentru o coroană circulară de masă m și raze $R_{1,2}$:

$$I_1 = I_2 = \frac{\pi}{4} \sigma (R_2^4 - R_1^4) = \frac{1}{4} m (R_1^2 + R_2^2), \quad I_3 = \frac{1}{2} m (R_1^2 + R_2^2).$$

Pentru o elipsă (plină) de masă m și semiaxe a, b, se găsește (aria elipsei este πab):

$$I_1 = \frac{1}{4} mb^2, \quad I_2 = \frac{1}{4} ma^2, \quad I_3 = I_1 + I_2.$$

3.4.8. *a)* Din motive de simetrie, $I_1 = I_2 = I_3 = \frac{1}{3}(I_1 + I_2 + I_3) = I$,

$$I = \frac{1}{3} \int (y^2 + z^2 + x^2 + z^2 + x^2 + y^2) \, dm = \frac{2}{3} R^2 \int dm = \frac{2}{3} mR^2.$$

b) $I_3 = \int R^2 \, dm = mR^2$;

$$I_1 = I_2 = \frac{1}{2}(I_1 + I_2) = \frac{1}{2}\int (y^2 + z^2 + x^2 + z^2)\, dm =$$

$$= \frac{1}{2}\int (R^2 + 2z^2)\, dm = \frac{1}{2} mR^2 + \int z^2 \, dm, \quad dm = \sigma dS = \sigma R \, d\theta \, dz,$$

$$\int z^2 \, dm = \sigma R \int_{-h/2}^{h/2} z^2 \, dz \int_0^{2\pi} d\theta = \frac{1}{12} mh^2,$$

$$I_1 = I_2 = \frac{1}{2} mR^2 + \frac{1}{12} mh^2, \quad I_3 = mR^2.$$

c) Centrul de masă se află pe axa de simetrie Oz la înălțimea z_0 de la vîrf:

$$z_0 = \frac{1}{m}\int z\sigma \, dS, \quad dS = \frac{r \, d\theta \, dz}{\cos \alpha}, \quad r = z \operatorname{tg} \alpha,$$

$$z_0 = \frac{1}{m}\int_0^h \int_0^{2\pi} \sigma z^2 \frac{\operatorname{tg} \alpha}{\cos \alpha} \, dz \, d\theta = \frac{2}{3} h,$$

rezultat evident dacă descompunem suprafața conică în triunghiuri elementare.

$$I_3 = \int r^2 \, dm = \int z^2 \operatorname{tg}^2 \alpha \, \sigma \, dS = \frac{1}{2} mR^2.$$

$$I_x = I_y = \frac{1}{2}(I_x + I_y) = \frac{1}{2}\int (r^2 + 2z^2)\, dm =$$

$$= \frac{1}{2} I_3 + \frac{1}{2} mh^2 = \frac{1}{4} m(R^2 + 2h^2).$$

În sfîrșit, aplicăm teorema lui Steiner:

$$I_1 = I_2 = I_x - mz_0^2 = \frac{1}{4} mR^2 + \frac{1}{18} mh^2.$$

3.4.9. *a)* $I_1 = I_2 = I_3 = \frac{1}{3}(I_1 + I_2 + I_3) = I$,

$$I = \frac{1}{3}\int (y^2 + z^2 + x^2 + z^2 + x^2 + y^2)\, dm = \frac{2}{3}\int r^2 \rho \, dV,$$

unde $dV = r^2 \, dr \sin \theta \, d\theta \, d\varphi$ sau luăm direct o pătură sferică de grosime infinitezimală dr de volum $dV = 4\pi r^2 \, dr$,

$$I = 2\frac{4\pi}{3}\rho \int_{R_1}^{R_2} r^4 \, dr = \frac{2}{5}\frac{4\pi}{3}\rho(R_2^5 - R_1^5) = \frac{2}{5} m \frac{R_2^5 - R_1^5}{R_2^3 - R_1^3}.$$

În particular, pentru o sferă omogenă plină ($R_1 = 0$, $R_2 = R$):

$$I_1 = I_2 = I_3 = \frac{2}{5} mR^2$$

și pentru o pătură sferică subțire ($R_1 = R_2 = R$):

$$I_1 = I_2 = I_3 = \frac{2}{3} mR^2.$$

Invers, plecînd de la sfera plină, $I = \frac{2}{5} \frac{4\pi}{3} \rho R^5$, găsim pentru o pătură sferică de masă m și raze $R_{1,2}$:

$$I = \frac{2}{5} \frac{4\pi}{3} \rho (R_2^5 - R_1^5) = \frac{2}{5} m \frac{R_2^5 - R_1^5}{R_2^3 - R_1^3}.$$

Pentru un elipsoid de semiaxe a, b, c se găsește (volumul elipsoidului este $\frac{4\pi}{3} abc$):

$$I_1 = \frac{1}{5} m(b^2 + c^2), \quad I_2 = \frac{1}{5} m(a^2 + c^2),$$

$$I_3 = \frac{1}{5} m(a^2 + b^2).$$

b) I_1 se obține însumînd momentele de inerție ale dreptunghiurilor elementare de dimensiuni b, c și grosime dx, anume, din problema 3.4.7 *a*, rezultă $dI_1 = \frac{1}{12} (b^2 + c^2)\, dm$, de unde

$$I_1 = \frac{1}{12} m(b^2 + c^2), \quad I_2 = \frac{1}{12} m(c^2 + a^2), \quad I_3 = \frac{1}{12} m(a^2 + b^2).$$

În particular, regăsim pentru placa dreptunghiulară ($c = 0$) rezultatul de la 3.4.7 *a* și pentru o tijă subțire ($b = c = 0$), rezultatul de la 3.4.5 *a*.

3.4.10. *a)* $I_3 = \int R^2 dm = \int R^2 \rho\, dV$.

Luăm dV sub forma unei pături cilindrice de grosime infinitezimală dR, atunci $dV = 2\pi R\, dR \cdot h$.

$$I_3 = 2\pi\rho h \int_{R_1}^{R_2} R^3\, dR = \frac{1}{2} \pi\rho h(R_2^4 - R_1^4) = \frac{1}{2} m(R_1^2 + R_2^2),$$

$$I_1 = I_2 = \frac{1}{2} (I_1 + I_2) = \frac{1}{2} \int (y^2 + z^2 + x^2 + z^2)\, dm =$$

$$= \frac{1}{2} \int (R^2 + 2z^2)\, dm = \frac{1}{2} I_3 + \int z^2 \rho\, dV.$$

Luăm dV sub forma coroanei circulare de grosime infinitezimală dz, atunci $dV = \pi (R_2^2 - R_1^2)\, dz$,

$$\int z^2 \rho\, dV = \pi\rho(R_2^2 - R_1^2)\int_{-h/2}^{h/2} z^2 dz = \frac{\pi\rho}{12}(R_2^2 - R_1^2)\, h^3 = \frac{1}{24} m h^2,$$

$$I_1 = I_2 = \frac{1}{4} m\left(R_1^2 + R_2^2 + \frac{1}{3} h^2\right), \quad I_3 = \frac{1}{2} m(R_1^2 + R_2^2).$$

În particular, pentru un cilindru plin ($R_1 = 0$, $R_2 = R$):

$$I_1 = I_2 = \frac{1}{4} m\left(R^2 + \frac{1}{3} h^2\right), \quad I_3 = \frac{1}{2} m R^2$$

și pentru o pătură cilindrică subțire ($R_1 = R_2 = R$):

$$I_1 = I_2 = \frac{1}{2} m\left(R^2 + \frac{1}{6} h^2\right), \quad I_3 = m R^2.$$

Invers, plecînd de la cilindrul plin:

$$I_1 = I_2 = \frac{1}{4}\pi\rho h R^4 + \frac{\pi\rho}{12} R^2 h^3, \quad I_3 = \frac{1}{2}\pi\rho h R^4,$$

regăsim pentru pătura cilindrică de masă m și raze $R_{1,2}$:

$$I_1 = I_2 = \frac{1}{4}\pi\rho h\,(R_2^4 - R_1^4) + \frac{\pi\rho}{12} h^3(R_2^2 - R_1^2) =$$

$$= \frac{1}{4} m\left(R_1^2 + R_2^2 + \frac{1}{3} h^2\right),$$

$$I_3 = \frac{1}{2}\pi\rho h\,(R_2^4 - R_1^4) = \frac{1}{2} m(R_1^2 + R_2^2).$$

În particular, pentru un disc subțire ($h = 0$) regăsim rezultatele de la problema 3.4.7, *b* sau pentru o tijă subțire ($R = 0$) regăsim 3.4.5, *a*.

b) Centrul de masă se găsește pe axa conului la distanța z_0 de la vîrf:

$$z_0 = \frac{1}{m}\int z\, dm, \quad dm = \rho\pi r^2\, dz = \rho\pi z^2 \operatorname{tg}^2\alpha\, dz,$$

$$z_0 = \frac{1}{m}\pi\rho \operatorname{tg}^2\alpha\int_0^h z^3\, dz = \frac{3}{4} h.$$

I_3 se obține însumînd momentele de inerție ale discurilor de grosime infinitezimală dz (v. problema 3.4.7, *b*), anume $dI_3 = \frac{1}{2}\, dm\, r^2$ deci,

$$I_3 = \frac{1}{2}\int z^2 \operatorname{tg}^2\alpha \cdot \rho\pi z^2 \operatorname{tg}^2\alpha\, dz = \frac{1}{2}\pi\rho \operatorname{tg}^4\alpha \int_0^h z^4\, dz = \frac{3}{10} mR^2,$$

$$I_x = I_y = \frac{1}{2}(I_x + I_y) = \frac{1}{2}\int (y^2 + z^2 + x^2 + z^2)\, dm =$$

$$= \frac{1}{2} I_3 + \int z^2\, dm,$$

$$\int z^2\, dm = \int_0^h z^2 \rho\pi z^2 \operatorname{tg}^2\alpha\, dz = \frac{3}{5} mh^2,$$

$$I_x = I_y = \frac{3}{5} m\left(\frac{1}{4} R^2 + h^2\right).$$

În sfîrșit, aplicînd teorema lui Steiner, obținem:

$$I_1 = I_2 = I_x - mz_0^2 = \frac{3}{20} m\left(R^2 + \frac{1}{4} h^2\right).$$

3.5. Dinamica rigidului. Mișcarea generală

3.5.1. Din conservarea energiei rezultă:

$$mgh = \frac{m}{2} v^2 + \frac{I}{2}\omega^2,\quad v^2 = 2ah,\quad \omega^2 = 2\varepsilon\varphi = 4\pi\varepsilon,$$

$$\varphi = 2\pi = \frac{\varepsilon}{2} t^2,\quad h = \frac{a}{2} t^2,\quad \varepsilon = \frac{2\pi a}{h},\quad I = mr_g^2;$$

$$mgh = mah + mr_g^2 \cdot 4\pi^2 a/h,$$

$$a = \frac{g}{1 + 4\pi^2 r_g^2/h^2},\quad \varepsilon = \frac{2\pi a}{h}.$$

3.6. Rotația în jurul axei fixe

3.6.1. $mg - T = ma$, $TR = I\varepsilon$.

Condiția de nealunecare a firului: accelerația firului, deci, a corpului m, trebuie să fie egală cu accelerația tangențială periferică a roții, deci $a_t = \varepsilon R = a$.

Rezolvînd sistemul, găsim:

$$a = \frac{g}{1 + I/mR^2}, \quad \varepsilon = \frac{a}{R}, \quad T = \frac{mg}{1 + mR^2/I};$$

$$v = \sqrt{2ah} = \omega R, \quad \omega = \frac{\sqrt{2ah}}{R} = \sqrt{\frac{2mgh}{mR^2 + I}}, \quad n = \frac{\omega}{2\pi}$$

sau din conservarea energiei:

$$mgh = \frac{m}{2} v^2 + \frac{I}{2} \omega^2 = \frac{1}{2} \omega^2 (mR^2 + I).$$

În cazul static al roții blocate, tensiunea din fir echilibrează greutatea corpului: $T_{st} = mg$; de aceea

$$\Delta N = mg - T = ma = \frac{mg}{1 + I/mR^2}.$$

3.6.2. $m_2 g - T_2 = m_2 a$, $T_1 - m_1 g = m_1 a$, $(T_2 - T_1) R = I\varepsilon$, $a = \varepsilon R$. Rezolvînd sistemul găsim:

$$a = g \frac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2 + I/R^2}, \quad T_{1,2} = g \frac{2m_1 m_2 + m_{1,2} I/R^2}{m_1 + m_2 + I/R^2}.$$

Cînd scripetele este blocat, $T_{1,2}$ devin egale cu greutățile respective, de aceea:

$$\Delta N = (m_1 + m_2) g - (T_1 + T_2) = (m_2 - m_1) a =$$

$$= \frac{g(m_2 - m_1)^2}{m_1 + m_2 + I/R^2} > 0.$$

3.6.3. $m_2 g - T_2 = m_2 a$, $m_1 g + T_2 - T_1 = m_1 a$,

$$T_1 R = I\varepsilon, \quad a = \varepsilon R, \quad I = \frac{1}{2} MR^2.$$

Rezolvînd sistemul, găsim:

$$a = \frac{g}{1 + M/2(m_1 + m_2)} = 4{,}9 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}, \quad \varepsilon = \frac{a}{R} = 49 \frac{\text{rad}}{\text{s}^2},$$

$$T_1 = \frac{Mg}{2 + M/(m_1 + m_2)} = 4{,}9 \text{ N},$$

$$T_2 = \frac{m_2 g}{1 + 2(m_1 + m_2)/M} = 1{,}96 \text{ N},$$

$$\Delta N = (m_1 + m_2) g - T_1 = (m_1 + m_2) a =$$

$$= \frac{g(m_1 + m_2)^2}{m_1 + m_2 + M/2} > 0; \quad \Delta N = 4{,}9 \text{ N}.$$

3.6.4. Semnele superioare corespund cazului *a)*, cele inferioare — cazului *b)*:

$$m_2 g - T_2 = m_2 \varepsilon R_2, \quad m_1 g - T_1 = \pm m_1 \varepsilon R_1,$$

$$T_2 R_2 \pm T_1 R_1 = I\varepsilon.$$

Cazul *b)* se obține din *a)* schimbînd pe R_1 în $-R_1$.

În cazul *a)* obținem, notînd $C = m_1 R_1^2 + m_2 R_2^2 + I$:

$$\varepsilon = \frac{g}{C}(m_2 R_2 + m_1 R_1), \quad T_{1,2} = \frac{g}{C}[m_{1,2} I + m_1 m_2 (R_{2,1}^2 - R_1 R_2)];$$

$$\Delta N = (m_1 + m_2) g - T_1 - T_2 = (m_2 R_2 + m_1 R_1) \varepsilon =$$

$$= \frac{g}{C}(m_2 R_2 + m_1 R_1)^2 > 0.$$

Cazul *b)* se obține de aici schimbînd pe R_1 în $-R_1$.

3.6.5. Conform problemei 3.6.1, indiferent dacă masa m coboară accelerat sau urcă frînat, accelerația fiind în ambele cazuri dirijată în jos, scripetele va atîrna mai ușor în cazul dinamic, deci, de pe celălalt taler trebuie *scăzute* greutăți de masă:

$$\frac{\Delta N}{g} = \frac{m}{1 + I/mR^2}.$$

3.6.6. $mg \sin \alpha - T - \mu N = ma, \; N = mg \cos \alpha,$

$$TR = I\varepsilon, \quad a = \varepsilon R.$$

Corpul poate luneca numai dacă $mg \sin \alpha > F_f = \mu mg \cos \alpha$, $\operatorname{tg} \alpha > \mu$.

Rezolvînd sistemul găsim:

$$a = g \frac{\sin \alpha - \mu \cos \alpha}{1 + I/mR^2}, \quad T = mg \frac{\sin \alpha - \mu \cos \alpha}{1 + mR^2/I}, \quad (\mu < \operatorname{tg} \alpha).$$

3.6.7. $I\varepsilon = M - M_f, \; I \dfrac{d\omega}{dt} = M - k\omega.$

Cînd se atinge turația limită, $\dot{\omega} = 0$, $M = M_f = k\omega_0$, deci $k = M/\omega_0$.

$$\frac{I\, d\omega}{M - k\omega} = dt, \quad \frac{I}{M} \frac{d\omega}{1 - \omega/\omega_0} = dt, \quad \frac{I}{M} \frac{\omega\, d\omega}{1 - \omega/\omega_0} = \omega\, dt = d\theta,$$

de unde integrînd cele două ecuații (cu ω inițial nul):

$$t = \frac{I}{M} \omega_0 \ln \frac{1}{1 - \omega/\omega_0} = 11{,}5 \text{ s},$$

$$\theta = 2\pi N = \frac{I}{M} \omega_0 \left(\omega_0 \ln \frac{1}{1 - \omega/\omega_0} - \omega \right) = \omega_0 \left(t - \frac{I}{M} \omega \right).$$

$$N = n_0 \left(t - \frac{I}{M} \omega \right) = 180 \text{ rot}.$$

3.6.8. În baza problemei 3.4.7, *a*, aplicînd teorema lui Steiner, avem:

$$I = m\left(\frac{b}{2}\right)^2 + \frac{m}{12}b^2 = \frac{m}{3}b^2 = 16\ \mathrm{g \cdot m^2}$$

sau direct ($\sigma = m/bh$ — densitatea superficială):

$$I = \int x^2\,\mathrm{d}m = \int x^2\sigma\,\mathrm{d}S = \int_0^b x^2\,\frac{m}{bh}\,h\,\mathrm{d}x = \frac{m}{3}b^2.$$

$$\mathrm{d}F = kv^2\,\mathrm{d}S = k\omega^2x^2 \cdot h\,\mathrm{d}x,\ \mathrm{d}M = x\,\mathrm{d}F = k\omega^2hx^3\,\mathrm{d}x,$$

$$M = \frac{k}{4}\omega^2hb^4,\ I\frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t} = -\frac{k}{4}\omega^2hb^4 = -K\omega^2,$$

$$-I\frac{\mathrm{d}\omega}{\omega^2} = K\,\mathrm{d}t,\ I\frac{\mathrm{d}\omega}{\omega} = -K\omega\,\mathrm{d}t = -K\,\mathrm{d}\theta.$$

Integrînd ultimele două ecuații, obținem:

$$I\left(\frac{1}{\omega} - \frac{1}{\omega_0}\right) = Kt,\ k = \frac{4m}{3\omega_0hb^2t}\left(\frac{\omega_0}{\omega} - 1\right),$$

$$k = \frac{2m}{3\pi n_0hb^2T} = 32\ \mathrm{g/m^3};$$

$$I\ln\frac{\omega}{\omega_0} = -K\theta,\ N = \frac{\theta}{2\pi} = \frac{I}{2\pi K}\ln\frac{\omega_0}{\omega} = \frac{n_0t}{\omega_0/\omega - 1}\ln\frac{\omega_0}{\omega},$$

$$N = n_0T\ln 2 = 6{,}9\ \mathrm{rot}.$$

3.6.9. Elementul de lanț de lungime $\mathrm{d}s = R\,\mathrm{d}\theta$ și masă $\mathrm{d}m = \frac{m}{l}\mathrm{d}s$ este supus la forța rezultantă $2T\sin\frac{\mathrm{d}\theta}{2} \cong T\,\mathrm{d}\theta$ (T — tensiunea din lanț):

$$T\,\mathrm{d}\theta = \mathrm{d}m \cdot \omega^2R = \frac{m}{l}R\,\mathrm{d}\theta\omega^2R = mn^2l\,\mathrm{d}\theta,$$

$$n = \sqrt{\frac{T}{ml}} = \sqrt{F_r/ml}.$$

3.6.10. $\mathrm{d}m \cdot \omega^2x = -\mathrm{d}F,\ \frac{m}{l}\omega^2x\,\mathrm{d}x = -\mathrm{d}F,\ (\mathrm{d}F < 0),$

$$F(x) = \frac{m}{2l}\omega^2(l^2 - x^2),\ R = F(0) = \frac{1}{2}m\omega^2l.$$

Dacă notăm cu $\xi(x)$ deplasarea secțiunii aflate inițial la distanța x, atunci alungirea relativă a elementului dx va fi:

$$\frac{d\xi}{dx} = \varepsilon = \sigma/E = \frac{F}{SE},$$

$$\frac{d\xi}{dx} = \frac{1}{SE} \cdot \frac{m}{2l} \omega^2 (l^2 - x^2), \quad \xi = \frac{m\omega^2 x}{2SEl}\left(l^2 - \frac{x^2}{3}\right).$$

Alungirea totală:

$$\Delta l = \xi(l) = \frac{m\omega^2 l^2}{3SE}, \quad \frac{\Delta l}{l} = \frac{2}{3}\frac{R}{SE},$$

adică numai 2/3 din alungirea statică produsă la tracțiunea cu forța R.

3.6.11. Rezultanta forțelor tangențiale și normale:

$$F_t = \int \varepsilon x \, dm = \int_0^l \varepsilon x \frac{m}{l} dx = \frac{1}{2} m\varepsilon l,$$

$$F_n = \int \omega^2 x \, dm = \frac{1}{2} m\omega^2 l, \quad F = \frac{1}{2} ml\sqrt{\omega^4 + \varepsilon^2},$$

adică valoarea rezultantei este exact ca și cum toată masa ar fi concentrată în CM, însă punctul de aplicație *nu este în* CM, ci în centrul de oscilație O', anume:

$$F_t \cdot x_0 = \int_0^l \varepsilon x \, dm \cdot x = \frac{1}{3} m\varepsilon l^2 = I\varepsilon, \quad x_0 = \frac{2}{3} l;$$

$$x_0 = l_r = \frac{I}{mx_{cm}} = x_{cm} + \frac{I_0}{mx_{cm}}, \quad I = m\left(\frac{l}{2}\right)^2 + \frac{1}{12} ml^2 = \frac{1}{3} ml^2.$$

Rezultatul este în concordanță cu (3.33—35) ($I'_{xz} = I'_{yz} = 0$).

Rezultanta $\vec{F}$ din O' este echivalentă cu o forță echipolentă, aplicată la capătul O, plus un cuplu de forțe de moment $M = F_t \cdot x_0 = \frac{1}{3} m\varepsilon l^2$, ($\vec{M} = \vec{x}_0 \times \vec{F}$).

3.6.12. Cazul static este posibil numai în varianta *a)*. Luînd momentele față de articulație (articulația ideală nu dă cuplu sau moment), avem:

$$T_0 l \cos\alpha = mg\frac{l}{2}\sin\alpha, \quad T_0 = \frac{1}{2} mg \operatorname{tg}\alpha.$$

În cazul dinamic, calculăm rezultanta forțelor de inerție (centrifuge):

$$F_c = \int \omega^2 x \, dm = \int_0^l \omega^2 r \sin\alpha \frac{m}{l} dr = m\omega^2 \frac{l}{2}\sin\alpha,$$

(ca și cum toată masa ar fi concentrată în CM),

$$F_c \cdot x_0 = \int \omega^2 x^2 \, dm = \int_0^l \omega^2 r^2 \sin^2 \alpha \frac{m}{l} \, dr = \frac{1}{3} m\omega^2 l^2 \sin^2 \alpha,$$

$$x_0 = \frac{2}{3} l \sin \alpha.$$

Punctul de aplicație este în centrul de oscilație:

$$x_0 = x_{cm} + I_0/mx_{cm}; \; x_{cm} = \frac{l}{2} \sin \alpha, \; I_0 = \frac{1}{12} ml^2 \sin^2 \alpha;$$

$$z_0' = -I_{xz}'/mx_{cm}, \; I_{xz}' = \mp \frac{m}{12} l^2 \sin \alpha \cos \alpha;$$

cuplul este nul: $I_{yz} = 0$. Am folosit (3.15).

Luăm momentele față de articulație:

$$\pm mg \cdot \frac{l}{2} \sin \alpha + F_c \cdot \frac{2}{3} l \cos \alpha = Tl \cos \alpha,$$

$$T = \frac{1}{2} m \left(\frac{2}{3} \omega^2 l \pm g \operatorname{tg} \alpha \right).$$

Cazul *b)* este posibil numai dacă $\omega \geqslant \sqrt{\frac{3g}{2l} |\operatorname{tg} \alpha|}$.

3.6.13. $\vec{F}_c = -\int \vec{a} \, dm = -\int \ddot{\vec{r}} \, dm.$

Derivînd de două ori vectorul de poziție al CM,

$$\vec{r}_{cm} = \frac{1}{m} \int \vec{r} \, dm \to \vec{a}_{cm} = \ddot{\vec{r}}_{cm} = \frac{1}{m} \int \vec{a} \, dm,$$

rezultă imediat că $\vec{F}_c = -m\vec{a}_{cm}$.

Momentele forțelor de inerție față de originea O (numai componentele transversale dau moment):

$$-\int dm \cdot r\varepsilon \cdot r = -I\varepsilon = -mr_{cm}\varepsilon \cdot l_r, \qquad l_r = \frac{I}{mr_{cm}}.$$

3.6.14. Tija este în echilibru sub acțiunea forțelor aplicate și a forțelor de inerție (metoda cinetostatică). Rezultanta forțelor de inerție este echipolentă cu forța de inerție a CM, iar punctul de aplicație este în centrul de oscilație (v. problema 3.6.12) (λ — densitatea lineară):

$$\lambda a \cdot \frac{a}{2} \sin \alpha \cdot \omega^2 \cdot \frac{2}{3} a \cos \alpha - \lambda ag \cdot \frac{a}{2} \sin \alpha +$$

$$+ \lambda b \cdot \frac{b}{2} \sin \alpha \omega^2 \cdot \frac{2}{3} b \cos \alpha + \lambda bg \frac{b}{2} \sin \alpha = 0,$$

$$\cos \alpha = \frac{3}{2} \frac{g}{\omega^2} \frac{a - b}{a^2 - ab + b^2}.$$

3.6.15. 1) Avem **numai forțe** în planul plăcii (deoarece $\varepsilon = \dot{\omega} = 0$):

$$F_y = 0,\ F_x = F_c = m\omega^2 R_{cm} \sin\alpha,\ F_z = -mg.$$

2) Luăm momentele **față** de O:

$$mgR_{cm} \sin\alpha + \int \mathrm{d}m \cdot \omega^2 x \cdot z = 0,$$

$$I_{xz} = \frac{mg}{\omega^2} R_{cm} \sin\alpha.$$

3.6.16. **Față de punctul** O, reacțiunea tijei asupra axului se reduce la o forță și un cuplu:

$$F_y = 0,\ F_x = \frac{1}{2} m\omega^2 (a - b) \sin\alpha,\ F_z = -mg;$$

$$M = \frac{1}{2} mg(b - a) \sin\alpha - \frac{1}{6} m\omega^2 (a^2 + b^2) \sin 2\alpha.$$

3.6.17. **Luînd față** de secțiunea din P momentele forțelor care acționează asupra restului tijei, avem:

$$M(x) = \int \mathrm{d}F_c \cdot x \sin\alpha = \omega^2 x \int \mathrm{d}m \cdot r =$$

$$= \omega^2 x \frac{m}{a+b} \int_0^b r\,\mathrm{d}r = \frac{m}{2} \omega^2 \frac{b^2 x}{a+b}.$$

Pentru secțiunea din Q:

$$M(y) = \int \mathrm{d}F_c \cos\alpha \cdot (r - y) = \omega^2 a \frac{m}{a+b} \int_y^b (r - y)\,\mathrm{d}r =$$

$$= \frac{m}{2} \omega^2 \frac{a}{a+b} (b - y)^2.$$

Pericolul de rupere este în A, unde

$$M(x = a) = M(y = 0) = \frac{m}{2} \omega^2 \frac{ab^2}{a+b}.$$

3.6.18. Momentul este dat de (3.30):

$$\vec{M} = -\vec{\omega} \times (\hat{I}_0 \vec{\omega}).$$

Alegem reperul propriu ca în figură, atunci

$$\vec{\omega} = \omega(0,\ \sin\alpha,\ \cos\alpha),\ \hat{I}_0 = \frac{m}{4} R^2 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix},$$

$$\hat{I}_0 \vec{\omega} = \frac{m}{4} \omega R^2 (0,\ \sin\alpha,\ 2\cos\alpha),$$

$$\vec{M} \equiv \vec{M}_{x'} = \frac{m}{8} \omega^2 R^2 \sin 2\alpha \vec{i}'.$$

3.6.19. $$\vec{F}_c = -\int \vec{a}\, dm = -\int \ddot{\vec{r}}\, dm = -\left(\int \vec{r}\, dm\right)^{\cdot\cdot} =$$

$$= -m\ddot{\vec{r}}_{cm} = -m\vec{a}_{cm} = m\omega^2(x_{cm}, y_{cm}, 0),$$

$$F_c = m\omega^2 R_{cm},\ R_{cm}^2 = x_0^2 + y_0^2.$$

Momentul forțelor centrifuge față de originea O:

$$\vec{M}_O = \int \vec{r} \times dm \cdot \omega^2 \vec{R} = \int \omega^2 dm \begin{pmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x & y & z \\ x & y & 0 \end{pmatrix} =$$

$$= \omega^2 \int dm\ (-yz,\ xz,\ 0) = \omega^2\,(I_{yz}, -I_{xz}, 0).$$

Componenta transversală a cuplului:

$$M_{\perp} = \vec{M}_O \vec{R}_{cm}/R_{cm} = \frac{1}{R_{cm}}\,\omega^2(x_0 I_{yz} - y_0 I_{xz}).$$

Un punct al axei centrale este dat de

$$\vec{r}_c = \frac{1}{F_c^2}\vec{F}_c \times \vec{M} = \frac{1}{mR_{cm}^2}\begin{pmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x_{cm} & y_{cm} & 0 \\ I_{yz} & -I_{xz} & 0 \end{pmatrix},$$

$$x_c = y_c = 0,\ z_c = -\frac{1}{mR_{cm}^2}\,(x_{cm} I_{xz} + y_{cm} I_{yz}).$$

3.7. Conservarea momentului cinetic

3.7.1. 1) Forțele de greutate dau moment nul în raport cu axa (fiind paralele cu axa), iar forțele de frecare din lagărele axului se neglijează, de aceea, momentul cinetic în raport cu axa se conservă:

$$0 = mR^2\left(\frac{u}{R} + 2\pi n\right) + I \cdot 2\pi n,\ n = -\frac{u}{2\pi R}\,\frac{1}{1 + I/mR^2};$$

2) $$\alpha_0 = 2\pi + 2\pi n \cdot \frac{2\pi R}{u} = \frac{2\pi}{1 + mR^2/I};$$

3) Componenta verticală $F_v = -mg$, iar cea radială

$$F_r = \frac{m}{R}(u + 2\pi n R)^2 = \frac{mu^2}{R}\,\frac{1}{(1 + mR^2/I)^2}.$$

Momentul de inerție față de O:

$$I = \int_{-\alpha/2}^{\alpha/2} \left(2R \sin \frac{\varphi}{2}\right)^2 m \frac{d\varphi}{\alpha} = 2mR^2\left(1 - \frac{2}{\alpha} \sin \frac{\alpha}{2}\right);$$

lungimea redusă:

$$l_r = \frac{I}{m(R - y_{cm})} = 2R, \quad T = 2\pi\sqrt{\frac{2R}{g}} \text{ (ca la circumferință).}$$

3.8.2. $$I = \frac{m}{12} l^2 + mx^2,$$

$$l_r = x + \frac{1}{12x} l^2, \; T = 2\pi\sqrt{\frac{l_r}{g}}.$$

Lungimea redusă este minimă cînd cei doi termeni din expresia sa sînt egali între ei (deoarece produsul lor este constant):

$$x_m = l/2\sqrt{3} \; (= \text{raza de inerție}),$$

$$l_{r\,min} = l/\sqrt{3}, \; T_m = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g\sqrt{3}}}.$$

3.8.3. 1) Conservarea energiei dă:

$$mgh = \frac{1}{2} I\omega^2, \; h = \frac{l}{2}(\cos\theta - \cos\alpha), \; I = \frac{m}{3} l^2,$$

$$\omega^2 = \frac{3g}{l}(\cos\theta - \cos\alpha), \; \varepsilon = \dot{\omega} = -\frac{3g}{2l} \sin\theta$$

sau din

$$M = I\varepsilon, \; M = -mg\frac{l}{2} \sin\theta.$$

2) Forța de inerție rezultantă $\vec{F}_i = -m\vec{a}_{cm} = m\frac{l}{2}(\omega^2, -\varepsilon)$ cu punctul de aplicație în centrul de oscilație situat la distanța $R_0 = 2l/3$ de axa de rotație (rezultă din condiția momentelor: $-m(l/2)\,\varepsilon R_0 = -I\varepsilon = M_i$).

Sub acțiunea greutății $m\vec{g}$, a forțelor de inerție F_i și a forței de reacțiune din articulație $(-\vec{F})$, bara este în echilibru relativ (metoda cinetostatică):

$$-F_r + mg\cos\theta + m\frac{l}{2}\omega^2 = 0, \; -F_\theta - mg\sin\theta - m\frac{l}{2}\varepsilon = 0,$$

de unde

$$F_r = mg\cos\theta + m\frac{l}{2}\omega^2 = \frac{1}{2} mg(5\cos\theta - 3\cos\alpha),$$

$$F_\theta = -mg\sin\theta - m\frac{l}{2}\varepsilon = -\frac{1}{4} mg\sin\theta.$$

3) Momentul încovoietor în secțiunea dată este momentul rezultant al tuturor forțelor care lucrează asupra unei jumătăți a barei în raport cu secțiunea considerată. Momentul forțelor de inerție este (alegem porțiunea inferioară):

$$-\int_x^l \frac{m}{l}\,dr \cdot r\varepsilon(r-x) = -\frac{m\varepsilon}{6l}(l-x)^2(2l+x) =$$

$$= \frac{mg}{4l^2}(l-x)^2(2l+x)\sin\theta.$$

Atunci M_x aplicat porțiunii superioare în secțiunea x va fi:

$$M_x = \frac{mg}{4l^2}(l-x)^2(2l+x)\sin\theta - mg\frac{l-x}{l}\frac{l-x}{2}\sin\theta =$$

$$= \frac{mg}{4l^2}(l-x)^2 x\sin\theta.$$

Momentul încovoietor este maxim cînd $l-x = l-x = 2x$, adică pentru $x = l/3$, unde $M_{max} = \frac{1}{9}mgl\sin\theta$.

3.8.4. Din punct de vedere al perioadei oscilațiilor, pendulul fizic este echivalent cu pendulul simplu avînd toată masa concentrata în centrul de oscilație, de aceea, proprietatea enunțată în textul problemei este evidentă. Altfel,

$$l_r' = \frac{I + m'l_r^2}{mR_0 + m'l_r}, \quad \text{unde } l_r = \frac{I}{mR_0},$$

deci $I = mR_0l_r$ și înlocuindu-l pe I rezultă $l_r' = l_r$.

Lungimea redusă $l_r = \frac{I_0}{mx} + x$ este minimă cînd $x = \sqrt{I_0/m}$ = raza de inerție (girație) față de axa centrală paralelă cu axa de rotație.

3.8.5. Analog problemei 3.8.3 avem:

1) $$\omega^2 = \frac{2}{I}mgR_0(\cos\theta - \cos\alpha), \quad \varepsilon = -\frac{1}{I}mgR_0\sin\theta.$$

2) $$F_r = mg\left[\frac{2}{I}mR_0^2(\cos\theta - \cos\alpha) + \cos\theta\right],$$

$$F_0 = mg\left(\frac{1}{I}mR_0^2 - 1\right)\sin\theta$$

sau

$$F_x = mg\frac{1}{I}mR_0^2(3\cos\theta - 2\cos\alpha)\sin\theta,$$

$$F_y = mg + mg\frac{1}{I}mR_0^2[(3\cos\theta - 2\cos\alpha)\cos\theta - 1].$$

3) $$\operatorname{tg}\varphi = \frac{F_\theta}{F_r} = \frac{(I/mR_0^2 - 1)\operatorname{tg}\theta}{2\cos\alpha/\cos\theta - 2 - I/mR_0^2} = \frac{I_0\operatorname{tg}\theta}{mR_0^2(2\cos\alpha/\cos\theta - 3 - I_0)}.$$

3.9. Mișcarea plan-paralelă

3.9.1. Din figură se vede că M stă pe loc, deci $T_2 = Mg$. Pentru scripete avem:

$$mg + T_2 - T_1 = ma,\ mgR = I'\varepsilon,\ I' = I + mR^2,\ \varepsilon = a/R,$$

de unde rezultă:

$$a = gmR^2/I',\ T_1 = Mg + mgI/I'.$$

Aplicație:

$$I = \frac{1}{2}mR^2,\ I' = \frac{3}{2}mR^2,\ a = 2g/3,\ T_1 = Mg + \frac{1}{3}mg \cong 2{,}0\,\text{N}.$$

3.9.2.

$$Mg - T_2 = Ma',\ a' = 2R\varepsilon,$$

$$mg + T_2 - T_1 = ma,\ a = R\varepsilon.$$

$$I'\varepsilon = mgR + T_2 2R,\ I' = I + mR^2.$$

Deși $a < g$, $a' = 2a$ ar putea fi mai mare decît g (ceea ce nu se poate pentru corpul M), de aceea trebuie să distingem cazurile: $a' < g$ ($T_2 > 0$) și $a \geqslant g/2$ ($T_2 = 0$, $a' = g$). Pentru aceasta calculăm pe T_2:

$$T_2 = \frac{Mg}{C}(I/mR^2 - 1),\ \text{unde}\ C = 1 + 4M/m + I/mR^2.$$

1) Dacă $I > mR^2$, $(a' < g)$, rezolvarea ecuațiilor de mai sus dă:

$$a = \frac{g}{C}\left(1 + \frac{2M}{m}\right),\ T_1 = \frac{Mg}{C}\left[1 + \frac{I}{R^2}\left(\frac{1}{m} + \frac{1}{M}\right)\right].$$

2) Dacă $I < mR^2$, trebuie ca $T_2 = 0$ și atunci ecuațiile sînt:

$$mg - T_1 = ma,\ I'\varepsilon = mgR,\ a = \varepsilon R,$$

de unde

$$a = gmR^2/I',\ T_1 = mgI/I'.$$

Aplicație: $I' = 2mR^2$, $a = g/2$, $T_1 = mg/2 = 1{,}0$ N, $T_2 = 0$, $(a' = g)$.

3.9.3. $(M + m)\,g - T = (M + m)\,a$, $Tr = I\varepsilon$, $\varepsilon = a/r$,

de unde rezultă:

$$a = g\,\frac{M + m}{M + m + I/r^2}, \quad T = \frac{(M + m)\,g}{1 + (M + m)\,r^2/I}.$$

Aplicație: $a \cong g\,(M + m)\,r^2/I = g/100$, $T \cong (M + m)\,g = 10$ N.

3.9.4. $mg + T_2 - T_1 = ma_1$, $T_1 r = I\varepsilon_1$, $\varepsilon_1 = a_1/r$,

$$mg - T_2 = ma_2, \quad T_2 r = I\varepsilon_2, \quad a_2 - a_1 = \varepsilon_2 r,$$

de unde rezultă:

$$a_1 = \frac{g}{A}\,(1 + 2I/mr^2), \quad a_2 = \frac{g}{A}\,(1 + 3I/mr^2),$$

unde

$$A = 1 + 3I/mr^2 + (I/mr^2)^2;$$

$$T_1 = Ia_1/r^2 = \frac{mg}{B}\,(2 + mr^2/I), \quad T_2 = I(a_2 - a_1)/r^2 = mg/B,$$

unde

$$B = 1 + 3\,mr^2/I + (mr^2/I)^2.$$

Aplicație: $A \cong (I/mr^2)^2 = 10^4$, $B \cong 1$, $a_1 \cong g \cdot 2mr^2/I = g/50$,

$a_2 \cong g \cdot 3mr^2/I = g/33$, $T_1 \cong 2mg = 20$ N, $T_2 \cong mg = 10$ N.

3.9.5. 1) Pentru tambur:

$$mg - T = ma, \quad TR = I\varepsilon$$

și pentru corp:

$mg - T = ma'$, deci $a' = a$, atunci $2a = \varepsilon R$.

Rezultă:

$$a = \frac{g}{1 + 2I/mR^2}, \quad T = \frac{mg}{1 + mR^2/2I}.$$

2) $T = mg$, deci $a = 0$.

Aplicație: 1) $I = \frac{1}{2}\,mR^2$, $a = g/2$, $T = mg/2 = 1{,}00$ N;

2) $T = mg = 2{,}00$ N, $a = 0$.

3.9.6. $Q = \frac{m}{2}\,(v^2 - v'^2) + \frac{I}{2}\,(\omega^2 - \omega'^2)$

sau

$$Q = \frac{I'}{2}(\omega^2 - \omega'^2), \text{ unde } I' = I + mR^2.$$

Cum $v = \omega R$, $v' = \omega' R$, rezultă:

$$Q = \frac{m}{2}(1 + I/mR^2)(v^2 - v'^2) = \frac{7}{10}m(v^2 - v'^2) = 2{,}5 \text{ mJ}.$$

3.9.7. 1) Cît timp are loc rostogolirea cu lunecare $F_f = \mu N = \mu mg$ și ecuațiile sînt:

$$\mu mg = ma, \quad \mu mg\, R = I\varepsilon,$$

de unde

$$a = \mu g, \quad \varepsilon = \mu mgR/I.$$

Ecuațiile cinematice sînt:

$$\omega = \omega_0 - \varepsilon t, \quad \theta = \omega_0 t - \frac{\varepsilon}{2}t^2.$$

În momentul cînd încetează lunecarea, avem $v = \omega R$, dispare forța de frecare de lunecare și de aici încolo, cilindrul se va rostogoli uniform (dacă neglijăm frecarea la rostogolire, cilindrul și masa fiind rigide).

$$a\tau = R\omega, \quad \mu g\tau = R(\omega_0 - \mu mgR\tau/I), \quad I = \frac{m}{2}R^2,$$

$$\tau = \frac{2\pi nR}{\mu g(1 + mR^2/I)} = \frac{2\pi nR}{3\,\mu g} = 1{,}57 \text{ s}.$$

2) $$N = \frac{\theta}{2\pi} = \frac{\omega_0^2 - \omega^2}{2\pi \cdot 2\varepsilon} = \frac{\pi n^2 R(2 + mR^2/I)}{\mu g(1 + mR^2/I)^2} = \frac{4\pi n^2 R}{9\mu g} = 15{,}7 \text{ rot}.$$

3) $$Q = \frac{I}{2}\omega_0^2 - \frac{I'}{2}\omega^2, \quad I' = I + mR^2,$$

$$Q = \frac{2\pi^2 n^2 I}{1 + I/mR^2} = \frac{2}{3}\pi^2 n^2 mR^2 = 7{,}1 \text{ J}.$$

4) Rostogolirea uniformă cu turația

$$n' = \frac{a\tau}{2\pi R} = \frac{n}{1 + mR^2/I} = \frac{n}{3} = 5 \text{ rot/s}.$$

3.9.8. În cazul rostogolirii fără lunecare:

$$F_2 - F_1 + F_f = ma, \quad F_2(R + r) - F_1(R - r) = I'\varepsilon.$$

$$I' = I + mR^2, \quad a = \varepsilon R,$$

de unde rezultă accelerația și forța de frecare:

$$a = \frac{R}{I'}[(F_2 + F_1)r + (F_2 - F_1)R], \quad F_f = \frac{1}{I'}[(F_2 + F_1)mRr - (F_2 - F_1)I].$$

Condiția de nealunecare este $|F_f| < \mu N = \mu mg$.
Condițiile ca cilindrul să rămînă în repaus ($a = \varepsilon = 0$):

$$F_2(R + r) = F_1 (R - r) \text{ și } F_f = F_1 - F_2 < \mu mg.$$

În cazul lunecării, $|F_f| = \mu mg$ și $a \neq \varepsilon R$. Atunci (sensul forței din figură):

$$a = \frac{1}{m}(F_2 - F_1) + \mu g, \quad \varepsilon = \frac{1}{I}[(F_2 + F_1)r - \mu gR].$$

Axa instantanee este la distanța $R' = a/\varepsilon$ sub centrul cilindrului.

Aplicație: *a)* $F_f = \frac{2}{3}F_1 = \frac{2}{3}\text{N} < \mu mg = 0{,}98$ N

rostogolire fără lunecare,

$$a = \frac{1}{m}\left(F_2 - \frac{1}{3}F_1\right) = 1{,}67 \text{ m/s}^2.$$

b) $F_f = \frac{2}{3}F_1 = \frac{4}{3}\text{N} > \mu mg = 0{,}98$ N,

rostogolire cu lunecare,

$$a = -0{,}02 \text{ m/s}^2, \quad \varepsilon = 20{,}8 \text{ rad/s}^2, \quad R' = -0{,}96 \text{ mm}$$

(deasupra centrului cilindrului).

3.9.9. În varianta (*a*), considerînd rostogolirea fără lunecare avem:

$$F\cos\alpha + F_f = ma, \quad N + F\sin\alpha - mg = 0,$$

$$FR - F_f R = I\varepsilon, \quad a = \varepsilon R.$$

de unde rezultă:

$$a = \frac{F}{m}\frac{1 + \cos\alpha,}{1 + I/mR^2}, \quad F_f = F\frac{1 - \cos\alpha \cdot I/mR^2.}{1 + I/mR^2}.$$

Condiția de nealunecare este $|F_f| < \mu N = \mu(mg - F\sin\alpha)$. Forța de frecare ar putea avea sensul opus celui din figură, numai dacă $I > mR^2/\cos\alpha$ (tamburul cu coroană punctată).

În cazul lunecării, $|F_f| = \mu(mg - F\sin\alpha)$, $a \neq \varepsilon R$ și considerînd sensul forței de frecare din figură, avem:

$$a = \frac{F}{m}\cos\alpha + \mu g, \quad \varepsilon = \frac{R}{I}(F - \mu mg).$$

Axa instantanee se află la distanța $R' = a/\varepsilon$ de centrul tamburului.

Varianta (*b*) este echivalentă cu (*c*) care la rîndul ei se obține din (*a*) schimbînd pe α *în* $(\pi - \alpha)$, adică pe cos α în — cos α. Obținem:

$$a = \frac{F}{m}\frac{1 - \cos\alpha}{1 + I/mR^2}, \qquad F_f = F\frac{1 + \cos\alpha \cdot I/mR^2}{1 + I/mR^2} > 0.$$

Condiția de nealunecare este $F_f < \mu N = \mu\,(mg - F \sin\alpha)$. În cazul lunecării:

$$a = -\frac{F}{m}\cos\alpha + \mu g, \qquad \varepsilon = \frac{R}{I}(F - \mu mg).$$

Aplicație numerică. În varianta (*a*):

$$F_f = \frac{F}{3}(2 - \cos\alpha) = 0{,}50 \text{ N} < \mu\,(mg - F \sin\alpha) = 0{,}60 \text{ N},$$

deci nu avem lunecare:

$$a = \frac{2F}{3m}(1 + \cos\alpha) = 2{,}0 \text{ m/s}^2.$$

În varianta (*b*):

$$F_f = \frac{F}{3}(2 + \cos\alpha) = \frac{5}{6}\text{N} = 0{,}84 \text{ N} > \mu\,(mg - F \sin\alpha) = 0{,}60 \text{ N},$$

deci avem rostogolire cu lunecare:

$$a = -\frac{F}{m}\cos\alpha + \mu g = 0{,}47 \text{ m/s}^2; \qquad \varepsilon = \frac{2}{mR}(F - \mu mg) = 53 \text{ rad/s}^2.$$

3.9.10. Pentru $\alpha < \pi/2$ avem varianta (*a*); pentru $\alpha > \pi/2$ obținem varianta (*b*).

1) Considerăm rostogolirea fără lunecare:

$$F \cos\alpha + F_f = ma, \quad F \sin\alpha + N - mg = 0,$$

$$Fr - F_f R = I\varepsilon, \quad \varepsilon = a/R, \; I' = I + mR^2,$$

($\varepsilon > 0$ înseamnă accelerații în sens orar), de unde rezultă:

$$F_f = \frac{F}{I'}(mrR - I\cos\alpha).$$

În cazul lunecării, forța de frecare devine $\mu N = \mu\,(mg - F \sin\alpha)$, deci condiția de nealunecare este $|F_f| < \mu N$ sau

$$\mu > \frac{|mrR - I\cos\alpha|}{I'(mg/F - \sin\alpha)}.$$

Mai departe, $a = \dfrac{F}{m}\dfrac{\cos\alpha + r/R}{1 + I/mR^2}$, $\varepsilon = a/R$, $R' = R$, unde R' este distanța axei instantanee de rotație.

În varianta (*b*), sensul accelerației se inversează spre stînga dacă $\cos\alpha < -r/R$, $\alpha > \pi - \arccos r/R$.

2) În cazul lunecării:

$$F_f = \pm\mu(mg - F\sin\alpha), \text{ după cum } mrR \gtrless I\cos\alpha;$$

$$a = \frac{1}{m}(F\cos\alpha + F_f), \quad \varepsilon = \frac{1}{I}(Fr - F_f R), \quad R' = a/\varepsilon.$$

În cazul unui mosor obișnuit, $mrR > I\cos\alpha$ și F_f este în sensul din figură.

Aplicație: a) $F_f = \dfrac{F}{8}(3 - 2\cos\alpha) = 0{,}10\ \text{N} < \mu(mg - F\sin\alpha) = 0{,}127\ \text{N}$, deci avem rostogolire fără lunecare;

$$a = \frac{3F}{8m}(2\cos\alpha + 1) = 3{,}0\ \text{m/s}^2, \quad \varepsilon = a/R = 100\ \text{rad/s}^2.$$

b) $F_{f\,necesar} = 0{,}20\ \text{N} > \mu(mg - F\sin\alpha) = 0{,}127\ \text{N}$, deci avem rostogolire cu alunecare;

$$a = -0{,}73\ \text{m/s}^2, \quad \varepsilon = 73\ \text{rad/s}^2.$$

$R' = -1{,}0$ cm (deasupra centrului mosorului).

3.9.11. Varianta *a)* în cazul nealunecării:

$$Mg - T = Ma', \quad T + F_f = ma, \quad a' = 2a,$$

$$I\varepsilon = TR - F_f R \text{ sau } I'\varepsilon = T\cdot 2R, \quad I' = I + mR^2,$$

de unde

$$\left(I = \frac{m}{2}R^2, \quad I' = \frac{3}{2}mR^2\right):$$

$$F_f = Mg\frac{mR^2 - I}{I' + 4MR^2} = mg\frac{M}{8M + 3m},$$

$$T = \frac{Mg}{1 + 4MR^2/I'} = Mg\frac{3m}{3m + 8M},$$

$$a = g\frac{1}{2 + I'/2MR^2} = g\frac{4M}{8M + 3m}.$$

Forța de frecare F_f poate fi în sensul opus celui din figură, numai dacă discul are o obadă exterioară (desenată punctat), astfel încît raza de giratie $r_g = I/mR > R$.

Condiția de nealunecare:

$$Mg\,\frac{|\,mR^2 - I\,|}{I' + 4MR^2} < \mu mg,\ \mu > \frac{M}{8M + 3m}.$$

În cazul lunecării:

$$F_f = \mu mg,\ T + F_f = ma,\ I\varepsilon = TR - F_f R,$$

$$Mg - T = Ma',\ a' - a = \varepsilon R,$$

de unde

$$T = Mmg\,\frac{1 + \mu\,(mR^2/I - 1)}{m + M + MmR^2/I} = Mg\,\frac{1 + \mu}{1 + 3\,M/m},$$

$$a = g\,\frac{M + \mu\,(m + 2\,MR^2/I)}{m + M + MmR^2/I} = g\,\frac{M + \mu\,(m + 4\,M)}{m + 3\,M},$$

$$\varepsilon = \frac{mgR}{I} = \frac{M - \mu\,(m + 2M)}{m + M + MmR^2/I} = \frac{2g}{R}\,\frac{M - \mu\,(m + 2\,M)}{m + 3\,M},$$

$$a' = g\,\frac{M\,(1 + mR^2/I) + \mu m\,(1 - mR^2/I)}{m + M + MmR^2/I} = g\,\frac{3\,M - \mu m}{m + 3\,M}.$$

În varianta *b)*, în cazul nealunecării, totul va fi în repaus (sau rostogolire uniformă și M în repaus), deoarece nu avem moment față de punctul de contact. Atunci:

$$a = 0,\ T = Mg,\ F_f = T = Mg,\ \mu > M/m.$$

În cazul lunecării:

$$F_f = \mu mg,\ T - \mu mg = ma,\ I\varepsilon = (T - \mu mg)\,R,$$

$$Mg - T = Ma',\ a' - a = \varepsilon\,R,$$

de unde

$$T = Mmg\,\frac{1 + \mu\,(mR^2/I + 1)}{m + M + MmR^2/I} = Mg\,\frac{1 + 3\mu}{1 + 3M/m},$$

$$a = g\,\frac{M - \mu m}{m + M + MmR^2/I} = g\,\frac{M - \mu m}{m + 3\,M},$$

$$\varepsilon = \frac{maR}{I} = \frac{mgR}{I}\,\frac{M - \mu m}{m + M + MmR^2/I} = \frac{2g}{R}\,\frac{M - \mu m}{m + 3M},$$

$$a' = g\,\frac{(M - \mu m)\,(1 + mR^2/I)}{m + M + MmR^2/I} = 3g\,\frac{M - \mu m}{m + 3M}.$$

Aplicație numerică. Pentru cilindru omogen:

$$I = \frac{1}{2} mR^2, \quad I' = \frac{3}{2} mR^2.$$

Varianta *(a)*:

$$F_f = 0{,}49 \text{ N} < \mu mg = 0{,}78 \text{ N}$$

sau

$$\mu = 0{,}10 > \frac{M}{8M + 3m} = 0{,}062,$$

deci nu avem lunecare;

$$T = 1{,}47 \text{ N}, \quad a = 2{,}45 \text{ m/s}^2, \quad \varepsilon = 82 \text{ rad/s}^2.$$

Varianta *(b)*: $\mu = 0{,}10 < M/m = 0{,}375$, deci avem lunecare; $F_f = \mu mg = 0{,}78$ N, $T = 2{,}8$ N, $a = 1{,}8$ m/s², $\varepsilon = 120$ rad/s², $a' = 5{,}4$ m/s².

3.9.12. În varianta *(a)* fără lunecare:
pentru mosor:

$$T - F_f = ma, \quad Tr + F_f R = I\varepsilon, \quad a = \varepsilon R$$

sau

$$T(r + R) = I'\varepsilon \text{ cu } I' = I + mR^2;$$

pentru corpul M:

$$Mg - T = Ma', \quad a' = \varepsilon (r + R).$$

Rezolvînd sistemul de ecuații, se obține:

1) $F_f = mg\ (I/mR^2 - r/R)/A$, unde $A = (1 + r/R)^2 + m/M + I/MR^2$, de unde condiția de nealunecare:

$$|F_f| < \mu N, \quad \mu > |I/mR^2 - r/R|/A.$$

2) $a = g\ (1 + r/R)/A$, 3) $\varepsilon = a/R$, 4) $T = mg\ (1 + I/mR^2)/A$,

5) $a' = a\ (1 + r/R)$, 6) $R_c = a/\varepsilon = R$.

În cazul lunecării: $F_f = \pm \mu mg$ (spre stînga, respectiv, spre dreapta, după cum $I/mR^2 - r/R \gtrless 0$). Atunci,

pentru mosor: $T \mp \mu mg = ma$, $Tr \pm \mu mgR = I\varepsilon$,

pentru corpul M: $Mg - T = Ma'$, $a' - a = \varepsilon r$.

Rezolvînd sistemul, se obține:

2) $$a = \frac{g}{B}[1 \mp \mu (m/M + mr^2/I + mrR/I)],$$

unde $$B = 1 + m/M + mr^2/I,$$

3) $$\varepsilon = \frac{mgR}{IB}[r/R \pm \mu (1 + r/R + m/M)],$$

4) $$T = \frac{mg}{B}[1 \mp \mu (mrR/I - 1)] = \frac{mg}{B}[1 + \mu(mrR/I - 1)],$$

5) $$a' = a + \varepsilon r = g - T/M, \quad 6)\ R_c = a/\varepsilon.$$

În varianta (*b*) fără lunecare:

$$T - F_f = ma, \qquad F_f R - Tr = I\varepsilon, \qquad a = \varepsilon R;$$

$$Mg - T = Ma', \qquad a' = \varepsilon (R - r).$$

Se vede că acest sistem diferă de sistemul de la varianta (*a*) doar prin semnul lui r. Prin urmare:

1) $F_f = mg\,(I/mR^2 + r/R)/A'$, $A' = (1 - r/R)^2 + m/M + I/MR^2$,

condiția de nealunecare: $\mu > (I/mR^2 + r/R)\,/\,A'$,

2) $a = g\,(1 - r/R)/A'$, 3) $\varepsilon = a/R$,

4) $T = mg\,(1 + I/mR^2)/A'$, 5) $a' = a\,(1 - r/R)$,

6) $R_c = a/\varepsilon = R$.

În cazul lunecării, forța de frecare $F_f = \mu mg$ este orientată spre stînga (ca în figură):

$$T - \mu mg = ma, \qquad mgR - Tr = I\varepsilon;$$

$$Mg - T = Ma', \qquad a - a' = \varepsilon r.$$

Soluția se poate scrie direct din varianta (*a*), luînd semnele superioare și schimbîndu-l pe r în $-r$:

2) $$a = \frac{g}{B}\,[1 - \mu\,(m/M + mr^2/I - mrR/I)],$$

3) $$\varepsilon = \frac{mgR}{IB}\,[-r/R + \mu\,(1 - r/R + m/M)],$$

4) $$T = \frac{mg}{B}\,[1 + \mu\,(mrR/I + 1)],$$

5) $a' = a - \varepsilon r = g - T/M$, 6) $R_c = a/\varepsilon$.

Aplicație numerică. În varianta (*a*):

$$I/mR^2 - r/R = -0{,}40 < 0, \quad A = 13{,}25,$$

$$\mu = 0{,}040 > 0{,}40/13{,}25 = 0{,}0302,$$

deci nu avem lunecare:

$$F_f = -0{,}296 \text{ N}$$

orientată spre dreapta (invers ca în figură),

$$a = 1{,}11 \text{ m/s}^2, \quad \varepsilon = 11{,}1 \text{ rad/s}^2,$$

$$T = 0{,}813 \text{ N}, \quad a' = 1{,}67 \text{ m/s}^2, \quad R_c = 0{,}10 \text{ m}.$$

În varianta (*b*):

$I/mR^2 + r/R = 0{,}60$, $A' = 11{,}25$, $\mu = 0{,}040 < 0{,}60/11{,}25 = 0{,}0533$,

deci avem lunecare: $F_f = 0{,}392$ N orientată spre stînga ca în figură, $B = 13{,}5$, $a = 0{,}508$ m/s², $\varepsilon = -5{,}8$ rad/s² (în sens trigonometric), $T = 0{,}90$ N, $a' = 0{,}80$ m/s², $R_c = -8{,}8$ cm (deasupra CM).

MIȘCAREA PLAN-PARALELĂ PE PLANUL ÎNCLINAT

3.9.13. În cazul nealunecării:

$$mg \sin \alpha - F_f = ma, \quad mg \cos \alpha - N = 0,$$

$F_f R = I\varepsilon$ (față de CM) sau $mg\sin \alpha \cdot R = I'\varepsilon$, $I' = I + mR^2$ (față de punctul de contact cu planul).

$$a = \varepsilon R.$$

Rezolvînd sistemul, rezultă:

1) $$F_f = \frac{mg \sin \alpha}{1 + mR^2/I}$$

și condiția de nealunecare:

$$F_f < \mu N = \mu mg \cos \alpha,$$

$$\mu > \frac{\operatorname{tg} \alpha}{1 + mR^2/I} \text{ sau } \operatorname{tg} \alpha < \mu (1 + mR^2/I).$$

2) $$a = \frac{g \sin \alpha}{1 + I/mR^2}, \quad 3)\ \varepsilon = a/R, \quad 4)\ R_c = a/\varepsilon = R.$$

În cazul lunecării:

$$F_f = \mu N = \mu mg \cos \alpha,$$

$$mg \sin \alpha - \mu mg \cos \alpha = ma, \quad \mu mg \cos \alpha \cdot R = I\varepsilon,$$

de unde

3) $$a = g (\sin \alpha - \mu \cos \alpha), \quad 3)\ \varepsilon = \mu \cdot mgR \cos \alpha / I,$$

4) $$R_c = a/\varepsilon = I (\operatorname{tg} \alpha - \mu)/\mu \cdot mR.$$

Aplicație numerică: pentru sferă,

$$I = \frac{2}{5} mR^2, \quad \mu = 0{,}40 > \frac{\operatorname{tg} \alpha}{1 + I/mR^2} = 0{,}357, \quad F_f = 1{,}4 \text{ N},$$

$$a = 3{,}5 \text{ m/s}^2, \quad \varepsilon = 35 \text{ rad/s}^2, \quad R_c = 0{,}10 \text{ m}.$$

3.9.14. $m = \rho_1 \pi R^2 h = \rho_2 \pi (R^2 - r^2) h$, $r^2 = R^2 (1 - \rho_1/\rho_2)$,

$$I_1 = \frac{1}{2} mR^2, \quad I_2 = \frac{1}{2} m(R^2 + r^2) = \frac{1}{2} mR^2 (2 - \rho_1/\rho_2).$$

Conform problemei precedente, în cazul nealunecării:

$$t_1/t_2 = \sqrt{a_2/a_1} = \sqrt{(1 + I_1/mR^2) : (1 + I_2/mR^2)} = \sqrt{3 : (4 - \rho_1/\rho_2)} < 1.$$

În cazul lunecării: $t_1 = t_2$, $(a_1 = a_2)$,

Aplicație numerică: $t_1/t_2 = 0{,}95$.

3.9.15. $I_1 = \frac{1}{2} \rho_1 \pi (R^4 - r^4) h$, $I_2 = \frac{1}{2} \rho_2 \pi R^4 h = \frac{1}{2} mR^2$,

$$I_3 = \frac{1}{2} \rho_2 \pi (R^4 - r^4) h,$$

dar

$$m = \rho_1 \pi (R^2 - r^2) h = \rho_2 \pi R^2 h,$$

de unde

$$r^2 = R^2 (1 - \rho_2/\rho_1),$$

deci

$$I_1 = I_2 (2 - \rho_2/\rho_1) > I_2, \quad I_3 = I_2 (2 - \rho_2/\rho_1) \rho_2/\rho_1 = I_1 \frac{\rho_2}{\rho_1}.$$

Notînd $x = \rho_2/\rho_1$ și $y = 2 - \rho_2/\rho_1$, avem $x + y = 2 = \text{const}$, atunci produsul xy este maxim cînd $x = y$, adică pentru $\rho_2/\rho_1 = 1$. Cum în realitate, $\rho_2/\rho_1 < 1$, rezultă $I_1 > I_2 > I_3$.

Din rezolvarea problemei 3.9.13 obținem:

1) $$\mu > \frac{\operatorname{tg} \alpha}{1 + mR^2/I_1} = \frac{\operatorname{tg} \alpha (2 - \rho_2/\rho_1)}{4 - \rho_2/\rho_1},$$

2) $$a_1 = \frac{g \sin \alpha}{1 + I_1/mR^2} = \frac{2g \sin \alpha}{3 + (1 - \rho_2/\rho_1)} < a_2 = \frac{2g \sin \alpha}{3} < a_3 =$$

$$= \frac{2g \sin \alpha}{3 - (1 - \rho_2/\rho_1)^2},$$

3) $\varepsilon_1 : \varepsilon_2 : \varepsilon_3 = 1/I_1 : 1/I_2 : 1/I_3 = 1 : (2 - \rho_2/\rho_1) : \rho_1/\rho_2$, $\varepsilon_1 < \varepsilon_2 < \varepsilon_3$.

4) $\mathcal{F}_y - m_l g \cos \alpha = 0$, $\mathcal{F}_x + m_l g \sin \alpha = m_l g (\sin \alpha - \mu \cos \alpha)$,

$$\mathcal{F} = m_l g \cos \alpha \cdot \sqrt{1 + \mu^2} = m_l g \frac{\cos \alpha}{\cos f}, \quad (\mu = \operatorname{tg} f).$$

Aplicație numerică: $\mu > \sqrt{3}/7 \cong 0{,}25$, $a_1 = g/3{,}5$, $a_2 = g/3$, $a_3 = g/2{,}75$, $\varepsilon_1 : \varepsilon_2 : \varepsilon_3 = 1 : 1{,}5 : 2$; $\mathcal{F} = 0{,}98$ N.

3.9.16. În varianta (*a*), considerînd cazul rostogolirii fără lunecare, avem:

$mg \sin \alpha - T - F_f = ma$, $T - Mg = Ma'$, $a' - a = \varepsilon R$, $(F_f - T)R = I\varepsilon$

sau

$$mg \sin \alpha \cdot R - 2TR = I'\varepsilon, \quad I' = I + mR^2, \quad a = \varepsilon R.$$

Rezolvînd sistemul, găsim:

1) $$F_f = mg \frac{1 - I/mR^2 + (2 + I/MR^2) \sin \alpha}{4 + I'/MR^2}, \quad F_f < \mu mg \cos \alpha,$$

$$\mu > \frac{(1 - I/mR^2) \sec \alpha + (2 + I/MR^2) \operatorname{tg} \alpha}{4 + I'/MR^2},$$

2) $$a = g \frac{(m/M) \sin \alpha - 2}{4 + I'/MR^2}, \quad 3) \ \varepsilon = a/R,$$

4) $$T = mg \frac{I'/mR^2 + 2 \sin \alpha}{4 + I'/MR^2}, \quad 5) \ a' = 2a, \quad 6) \ R_c = a/\varepsilon = R,$$

În cazul *lunecării*: 1) $F_f = \mu mg \cos \alpha$,
$mg \sin \alpha - \mu mg \cos \alpha - T = ma$, $T - Mg = Ma'$, $a' - a = \varepsilon R$,
$(\mu mg \cos \alpha - T) R = I\varepsilon$,
de unde

2) $$a = gA + g(\sin \alpha - 2\mu \cos \alpha), \quad A = \frac{1 + \sin \alpha - \mu \cos \alpha,}{1 + M/m + MR^2/I},$$

3) $$\varepsilon = \frac{g}{R} \frac{mR^2}{I} A, \quad 4) \ T = mg(\mu \cos \alpha - A),$$

5) $a' = a + \varepsilon R = g(\sin \alpha - 2\mu \cos \alpha) + gA(1 + mR^2/I)$, 6) $R_c = a/\varepsilon$.

În varianta (*b*), în cazul rostogolirii *fără* lunecare, firul stă pe loc, deci $a' = 0$, $T = Mg$,

$$mg \sin \alpha - T - F_f = ma, \quad (F_f + T)R = I\varepsilon, \quad a = \varepsilon R$$

sau

$$mg \sin \alpha \cdot R = I'\varepsilon, \quad I' = I + mR^2;$$

rezolvînd sistemul, obținem:

1) $$F_f = \frac{mg \sin \alpha}{1 + mR^2/I} - Mg, \quad \mu > \left| \frac{\operatorname{tg} \alpha}{1 + mR^2/I} - \frac{M}{m \cos \alpha} \right|,$$

2) $$a = \frac{g \sin \alpha}{1 + I/mR^2}, \quad 3) \ \varepsilon = a/R, \quad 4) \ T = Mg, \quad 5) \ a' = 0,$$

6) $$R_c = a/\varepsilon = R.$$

În cazul *lunecării*, sensul forței de frecare ($|F_f| = \mu mg \cos \alpha$) este cel din figură dacă $mg \sin \alpha : (1 + mR^2/I) - Mg > 0$. Atunci $mg \sin \alpha - \mu mg \cos \alpha - T = ma$, $T - Mg = Ma'$, $a - a' = \varepsilon R$, $(\mu mg \cos \alpha + T) R = I\varepsilon$,
de unde

2) $$a = \frac{g}{B}[(\sin \alpha - \mu \cos \alpha) m/M - 1 + (mR^2/I) \sin \alpha],$$

unde $B = 1 + m/M + mR^2/I$,

3) $$\varepsilon = \frac{g}{R}\frac{mR^2}{IB}(1 + \sin\alpha + \mu\cos\alpha \cdot m/M),$$

4) $$T = \frac{mg}{B}[1 + \sin\alpha - \mu\cos\alpha\,(1 + mR^2/I)],$$

5) $$a' = a - \varepsilon R = \frac{g}{B}\frac{m}{M}[\sin\alpha - (M/m + \mu\cos\alpha)\,(1 + mR^2/I)],$$

6) $$R_c = a/\varepsilon.$$

Aplicație numerică. În varianta (*a*):

$$\mu_{min} = 4\sqrt{3}/45 = 0{,}154 < \mu = 0{,}20,$$

deci nu avem lunecare.

$$F_f = \frac{1}{3}mg,\quad a = -\frac{5}{18}g \text{ (urcă)},\ T = \frac{4}{9}mg,\ a' = -\frac{5}{9}g \text{ (coboară)}.$$

În varianta (*b*):

$$\mu_{min} = 4\sqrt{3}/7 = 0{,}99 > \mu = 0{,}20,$$

deci avem luncare. Sensul forței de frecare este invers celui din figură (se va schimba μ în $-\mu$ în formulele respective):

$$a = 0{,}205\ g,\ \varepsilon = 0{,}738\ g/R,\ T = 0{,}47\ mg,$$

$$a' = -0{,}533\ g \text{ (coboară)},\ R_c = 0{,}278\ R.$$

3.9.17. În varianta (*a*), considerînd rostogolirea fără lunecare:

$$mg\sin\alpha - T - F_f = ma,\ T - Mg = Ma',\ a' - a = \varepsilon r,$$

$$F_f R - Tr = I\varepsilon,\ a = \varepsilon R \text{ sau } mg\sin\alpha \cdot R - T(R + r) = I'\varepsilon,$$

$$I' = I + mR^2,$$

de unde rezultă:

1) $$F_f = \frac{Mg}{A}\left[\frac{r}{R} - \frac{I}{mR^2} + \left(\frac{r}{R} + \frac{r^2}{R^2} + \frac{I}{MR^2}\right)\sin\alpha\right],$$

unde

$$A = 1 + I/mR^2 + (1 + r/R)^2 M/m,\quad |F_f| < \mu mg\cos\alpha,$$

2) $$a = \frac{g}{A}\left[\sin\alpha - \left(1 + \frac{r}{R}\right)\frac{M}{m}\right],$$

3) $\varepsilon = a/R$, 4) $$T = \frac{Mg}{A}\left[1 + \frac{I}{mR^2} + \left(1 + \frac{r}{R}\right)\sin\alpha\right],$$

5) $$a' = a(1 + r/R),\quad 6)\ R_c = a/\varepsilon = R.$$

În cazul lunecării: $|F_f| = \mu mg\cos\alpha$ (sensul lui F_f este dat de semnul expresiei 1) a lui F_f de mai sus).

$$mg\sin\alpha - T - \mu mg\cos\alpha = ma,\ T - Mg = Ma',$$

$$mg\cos\alpha \cdot R - Tr = I\varepsilon,\ a' - a = \varepsilon r,$$

de unde rezultă:

$$2)\quad a=\frac{g}{B}\left[\left(\frac{m}{M}+\frac{mr^2}{I}\right)\sin\alpha-1-\mu\cos\alpha\left(\frac{m}{M}+\frac{mr^2}{I}+\frac{mrR}{I}\right)\right],$$

unde

$$B=1+m/M+mr^2/I,$$

$$3)\quad \varepsilon=\frac{mgR}{IB}\left[\mu\cos\alpha\left(1+\frac{m}{M}+\frac{r}{R}\right)-\frac{r}{R}\,(1+\sin\alpha)\right],$$

$$4)\quad T=\frac{mg}{B}\left[1+\sin\alpha-\mu\cos\alpha\,(1-mrR/I)\right],$$

$$5)\quad a'=a+\varepsilon r=T/M-g,\quad 6)\quad R_c=a/\varepsilon.$$

În varianta (*b*), în cazul *nealunecării*:

$$mg\sin\alpha-T-F_f=ma,\quad T-Mg=Ma',\quad a-a'=\varepsilon r,$$

$$F_fR+Tr=I\varepsilon,\quad a=\varepsilon R \text{ sau } mg\sin\alpha\cdot R-T(R-r)=I'\varepsilon,$$

$I'=I+mR^2$ și în cazul *lunecării*: $|F_f|=\mu mg\cos\alpha$,

$$mg\sin\alpha-T-\mu mg\cos\alpha=ma,\quad T-Mg=Ma',$$

$$\mu mg\cos\alpha\cdot R+Tr=I\varepsilon,\quad a-a'=\varepsilon r.$$

Se vede că ambele sisteme diferă de cele de la varianta (*a*) prin semnul lui r, de aceea soluția se obține de acolo schimbînd pe r în $-r$.

Aplicație. În varianta (*a*), $F_f=\frac{3}{14}\,mg=0{,}214mg<\mu mg\cos\alpha=0{,}26\,mg$, deci nu avem lunecare.

$$a=-\frac{2}{7}\,g \text{ (urcă)},\quad \varepsilon=-\frac{2}{7}\,\frac{g}{R} \text{ (sens orar)},\quad T=\frac{4}{7}\,mg,$$

$$a'=-\frac{3}{7}\,g \text{ (coboară)},\quad R_c=R.$$

În varianta (*b*), $F_f=-\frac{1}{2}\,mg=-0{,}50\,mg$ (în sens invers celui din figură), în timp ce $\mu mg\cos\alpha=0{,}26\,mg$, deci avem lunecare și trebuie să schimbăm semnul lui μ în formulele respective;

$$a=0,\quad \varepsilon=0{,}48\,g/R$$

(se învîrte pe loc în sens trigonometric),

$$T=0{,}76\,mg,\quad a'=0{,}24\,g,\quad R_c=0.$$

* * *

3.9.18. Considerînd cazul nealunecării:

corp: $F_f=ma,\quad F_fR=I\varepsilon,$

scîndură: $F-F_f'-F_f=m'a',\ F_f'=\mu'(m+m')g,\ a'=a+\varepsilon R.$

Rezolvînd sistemul, găsim:

1) $$F_f = \frac{F - \mu'(m + m')g}{1 + (1 + mR^2/I)\, m'/m}, \quad F_f < \mu mg,$$

2) $$a = F_f/m, \quad a' = \frac{1}{m} F_f (1 + mR^2/I),$$

3) $$\varepsilon = F_f R/I, \qquad 4)\ R_c = I/mR.$$

În cazul lunecării: $F_f = \mu mg$,

$$\mu mg = ma, \quad \mu mgR = I\varepsilon,$$

$$F - \mu'(m + m')g - \mu mg = m'a',$$

de unde

2) $$a = \mu g, \quad a' = \frac{1}{m'}[F - \mu'(m + m')g - \mu mg],$$

3) $$\varepsilon = \mu mgR/I, \quad 4)\ R_c = I/mR.$$

Aplicație: $F_f = 1{,}00$ N $< \mu mg = 1{,}96$ N, deci sfera nu lunecă;

$a = 1{,}00$ m/s^2, $a' = 3{,}5$ m/s^2, $\varepsilon = 2{,}5$ rad/s^2, $R_c = 0{,}40\ R$.

3.9.19. 1) $\vec{P} + \vec{N} = m\vec{a}_{cm}$, $N\,\frac{l}{2}\cos\alpha = I\varepsilon = \frac{m}{12} l^2\varepsilon$, dar $y_{cm} = \frac{l}{2}\sin\alpha$,

$$\dot{y}_{cm} = v_{cm} = \frac{l}{2}\cos\alpha \cdot \dot{\alpha} = -\frac{l}{2}\cos\alpha \cdot \omega, \quad (\dot{\alpha} = -\omega),$$

$$\ddot{y}_{cm} = a_{cm} = -\frac{l}{2}\sin\alpha \cdot \omega^2 - \frac{l}{2}\cos\alpha \cdot \varepsilon.$$

Pentru momentul inițial, $\omega = 0$, deci $a_{cm} = -\varepsilon\frac{l}{2}\cos\alpha_0$ și prima ecuație devine:

$$-P + N = ma_{cm} = -\frac{1}{2}\varepsilon ml\cos\alpha_0.$$

Rezultă:

$$N = \frac{P}{1 + 3\cos^2\alpha_0}, \text{ deci asupra podelei: } \frac{\vec{P}}{1 + 3\cos^2\alpha_0}.$$

2) $$\vec{P} - \frac{\vec{P}}{1 + 3\cos^2\alpha_0} = m\vec{a}_{cm}, \quad \vec{a}_{cm} = \frac{\vec{g}}{1 + 1/3\cos^2\alpha_0},$$

3) $$\varepsilon = \frac{6g\cos\alpha_0}{l(1 + 3\cos^2\alpha_0)}.$$

4) CM coboară pe verticală după axa Oy, atunci coordonatele capătului B sînt:

$$x = -\frac{l}{2}\cos\alpha, \quad y = l\sin\alpha,$$

de unde

$$4x^2/l^2 + y^2/l^2 = 1 \text{ (elipsă).}$$

5) $$-P + N = ma_{cm},\ M\frac{l}{2}\cos\alpha = I\dot{\omega},\quad I = \frac{m}{12}l^2,$$

dar

$$y_{cm} = \frac{l}{2}\sin\alpha,\quad \dot{\alpha} = -\omega,$$

$$a_{cm} = \ddot{y}_{cm} = -\frac{l}{2}\sin\alpha\cdot\omega^2 - \frac{l}{2}\cos\alpha\cdot\omega,$$

astfel încît rezultă:

$$\dot{\omega}(\cos\alpha + 1/3\cos\alpha) + \omega^2\sin\alpha = 2P/ml.$$

Făcînd schimbarea de variabilă:

$$\dot{\omega} = \frac{d\omega}{dt} = \frac{d\omega}{d\sin\alpha}\frac{d\sin\alpha}{dt} = -\frac{d\omega}{d\sin\alpha}\cos\alpha\cdot\omega = -\frac{1}{2}\frac{d\omega^2}{d\sin\alpha}\cos\alpha,$$

rezultă ecuația diferențială liniară:

$$\left(\frac{4}{3} - \sin^2\alpha\right)\frac{d\omega^2}{d\sin\alpha} - 2\sin\alpha\cdot\omega^2 = -\frac{4P}{ml}$$

cu soluția

$$\omega^2 = \frac{3}{4 - 3\sin^2\alpha}\left(-4P\frac{\sin\alpha}{ml} + \text{const}\right).$$

Determinînd constanta de integrare din condiția $\omega(\alpha_0) = 0$, rezultă:

$$\omega^2 = \frac{12P(\sin\alpha_0 - \sin\alpha)}{ml\,(4-3\sin^2\alpha)}.$$

3.9.20. 1) Ducînd perpendicularele în A și B pe vitezele acestor puncte, găsim centrul instantaneu de rotație C. Prin coborîrea CM, energia potențială se transformă în energia cinetică de rotație:

$$mg\Delta h + \frac{1}{2}I'\omega^2 = 0,\quad h = \frac{l}{2}(\cos\theta - \cos\theta_0),$$

$$I' = \frac{m}{12}l^2 + m\left(\frac{l}{2}\right)^2 = \frac{1}{3}ml^2,$$

$$\omega^2 = \frac{3g}{l}(\cos\theta_0 - \cos\theta).$$

Prin derivare ($\dot{\omega} = \varepsilon$, $\dot{\theta} = \omega$):

$$2\omega\dot{\omega} = \frac{3g}{l}\sin\theta\cdot\dot{\theta},\quad \varepsilon = \frac{3g}{2l}\sin\theta$$

sau scriind ecuația pentru rotația în jurul lui C:

$$M = I'\varepsilon,\quad M = mg\frac{l}{2}\sin\theta,\quad I' = \frac{1}{3}ml^2.$$

2) Scriind ecuația rotației în jurul CM:

$$N_1\frac{l}{2}\sin\theta - N_2\frac{l}{2}\cos\theta = I\varepsilon = \frac{1}{12}ml^2\varepsilon = \frac{1}{8}mgl\sin\theta$$

și ecuația pentru mișcarea radială a CM, care se mișcă pe un arc de cerc de rază $l/2$ cu centrul în O:

$$(mg - N_1)\cos\theta - N_2\sin\theta = m\omega^2\frac{l}{2} = m\frac{3g}{2}(\cos\theta_0 - \cos\theta),$$

rezultă:

$$N_1 = \frac{1}{4}mg(1 + 9\cos^2\theta - 6\cos\theta\cos\theta_0),$$

$$N_2 = \frac{3}{4}mg(3\cos\theta - 2\cos\theta_0)\sin\theta.$$

3) $$N_2 = 0 \rightarrow \cos\theta' = \frac{2}{3}\cos\theta_0.$$

4) Imediat după desprindere:

$$N_2 = 0,\ N_1 = \frac{1}{4}mg,\ m\vec{g} - \frac{1}{4}m\vec{g} = m\vec{a}_0,\ \vec{a}_0 = \frac{3}{4}\vec{g}.$$

5) În momentul desprinderii, $\omega'^2 = \frac{g}{l}\cos\theta_0$. Folosind rezultatul problemei precedente, cu notațiile actuale:

$$\omega^2 = \frac{3}{4 - 3\cos^2\theta}\left(-4\frac{g}{l}\cos\theta + \text{const}\right)$$

și determinînd constanta din condiția $\omega(\theta') = \omega'$, obținem:

$$\omega^2 = \frac{4g}{3l}\frac{9(\cos\theta_0 - \cos\theta) - \cos^3\theta_0}{4 - 3\cos^2\theta}.$$

3.10. Oscilații

3.10.1. 1) $E_p = mgx = mgl(1 - \cos\theta) \cong \frac{1}{2}mgl\theta^2 = \frac{1}{2}k\theta^2,\ k = mgl,$

$$E_c = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}ml^2\dot{\theta}^2 = \frac{1}{2}\mu\dot{\theta}^2,\ \mu = ml^2,$$

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{\mu}{k}} = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}.$$

2) La fel ca în cazul precedent, $T = 2\pi\sqrt{l/g}$.

3) $E_p \cong \frac{1}{2}mgl\varphi^2$, dar $l\varphi \cong \frac{b}{2}\theta$ (b — lungimea barei),

atunci

$$E_p = \frac{1}{2} mg \frac{b^2}{4l} \theta^2, \quad k = \frac{1}{4} \frac{mgb^2}{l},$$

$$E_c = \frac{1}{2} I\omega^2 = \frac{1}{2} \frac{mb^2}{12} \dot{\theta}^2, \quad \mu = \frac{mb^2}{12},$$

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{\mu}{k}} = 2\pi \sqrt{\frac{l}{3g}}.$$

4) Imediat după ruperea unui fir de suspensie:

$$mg - T = ma_{cm}, \quad T\frac{b}{2} = I\varepsilon = \frac{1}{12} mb^2\varepsilon, \quad a_{cm} = \frac{b}{2} \varepsilon,$$

de unde

$$T = \frac{1}{4} mg.$$

3.10.2. $E_p = \frac{1}{2} kx^2$, $E_c = \frac{1}{2} m\dot{x}^2 + \frac{1}{2} I\omega^2 = \frac{1}{2} (m + I/R^2)\, \dot{x}^2 = \frac{1}{2} \mu \dot{x}^2$,

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{\mu}{k}} = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}(1 + I/mR^2)}.$$

3.10.3. 1) Din conservarea energiei cinetice și potențiale avem:

$$mgh = \frac{1}{2} I'\omega^2, \quad h = r_0 (\cos\theta - \cos\theta_0),$$

$$I' = I + m(R^2 + r_0^2 - 2Rr_0 \cos\theta), \quad I = mr_g^2,$$

de unde

$$\omega^2 = \frac{2gr_0 (\cos\theta - \cos\theta_0)}{r_g^2 + R^2 + r_0^2 - 2Rr_0 \cos\theta}.$$

2) $$E_p = mgr_0(1 - \cos\theta) \cong \frac{1}{2} mgr_0 \theta^2 = \frac{1}{2} k\theta^2,$$

$$E_c \cong \frac{1}{2} I'\dot{\theta}^2 = \frac{1}{2} [I + m(R^2 + r_0^2 - 2Rr_0 \cos\theta)]\, \dot{\theta}^2 \cong$$

$$\cong \frac{1}{2} m[r_g^2 + (R - r_0)^2]\, \dot{\theta}^2 = \frac{1}{2} \mu \dot{\theta}^2,$$

de unde perioada micilor oscilații:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{\mu}{k}} = 2\pi \sqrt{\frac{r_g^2 + (R - r_0)^2}{gr_0}}.$$

3.10.4. În poziția de echilibru stabil, energia potențială este minimă, deci centrul de greutate se află în poziția cea mai coborîtă. La o mică rotire a scîndurii, energia potențială trebuie să crească sau centrul de greutate trebuie să urce.

1) Conform figurii avem ordonata centrului de masă:

$$y_0 = R + b/2, \text{ dar } A'B = \text{arc } AB = R\theta,$$

$y = \text{pr. } OBA'C = \text{pr. } OB + \text{pr. } BA' + \text{pr. } A'C = R\cos\theta + R\theta\sin\theta + \frac{b}{2}\cos\theta$, de unde creşterea de energie potenţială:

$$\Delta E_p = mg\,(y - y_0) = mg\left[R\theta\sin\theta - \left(R + \frac{b}{2}\right)(1 - \cos\theta)\right] \cong \frac{1}{4}\,mg\,(2R - b)\theta^2,$$

de unde condiţia de echilibru stabil: $D > b$.

2)
$$E_p \cong \frac{1}{2}\,mg\,\frac{D - b}{2}\,\theta^2 = \frac{1}{2}\,k\theta^2,$$

$$E_c \cong \frac{1}{2}\,I'\dot{\theta}^2, \quad I' = I + m\left(\frac{b}{2}\right)^2, \quad I = \frac{1}{12}\,m\,(l^2 + b^2),$$

$$E_c \cong \frac{1}{2}\,\frac{m}{12}\,(l^2 + 4b^2)\dot{\theta}^2 = \frac{1}{2}\,\mu\dot{\theta}^2,$$

de unde perioada micilor oscilaţii:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{\mu}{k}} = 2\pi\sqrt{\frac{l^2 + 4b^2}{6g(D - b)}}.$$

Rezultă şi de aici condiţia $D - b > 0$.

3.10.5. 1) Pe direcţia radială avem:

$$N - mg\cos\theta = \frac{mv^2}{R - r}.$$

Din conservarea energiei mecanice avem:

$$mg\,(R - r)\,(\cos\theta - \cos\theta_0) = \frac{1}{2}\,(I + mr^2)\,\frac{v^2}{r^2}.$$

Rezultă:

$$N = mg\,\frac{(3 + I/mr^2)\cos\theta - 2\cos\theta_0}{1 + I/mr^2}.$$

2)
$$mg\sin\theta - F_f = ma_t = m\varepsilon r, \quad F_f r = I\varepsilon,$$

de unde rezultă:

$$F_f = \frac{mg\,\sin\theta}{1 + mr^2/I}$$

şi condiţia de nealunecare $F_f < \mu N$:

$$\mu > \left(\frac{F_f}{N}\right)_{max} = \frac{\operatorname{tg}\theta_0}{1 + mr^2/I}, \quad (\theta \to \theta_0).$$

3)
$$\omega^2 = \frac{v^2}{r^2} = \frac{2g}{r}\,\frac{\cos\theta - \cos\theta_0}{1 + I/mr^2}\,(R/r - 1),$$

$$\varepsilon = F_f \frac{r}{I} = \frac{g}{r} \frac{\sin\theta}{1 + I/mr^2}.$$

4) $$E_p = mg(R - r)(1 - \cos\theta) \cong \frac{1}{2} mg(R - r)\theta^2,$$

dar $(R - r)\theta \cong r\varphi$, deci

$$E_p \cong \frac{1}{2} mg \frac{r^2}{R - r} \varphi^2 = \frac{1}{2} k\varphi^2,$$

$$E_c = \frac{1}{2} I'\dot{\varphi}^2 = \frac{1}{2}(I + mr^2)\dot{\varphi}^2 = \frac{1}{2}\mu\dot{\varphi}^2,$$

de unde perioada micilor oscilații:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{\mu}{k}} = 2\pi\sqrt{\frac{1}{g}(R - r)(1 + I/mr^2)}.$$

5) În absența frecării, corpul nu se rotește și se comportă ca un pendul simplu (matematic):

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{R - r}{g}}.$$

3.11. Ciocniri

3.11.1. $FR_0 = I'\varepsilon$, $I' = I + mR_{cm}^2$.

Punem condiția ca tija să se rotească liber în jurul capătului superior, fără ca acest capăt să capete accelerație:

$$\varepsilon = a_{cm}/R_{cm}, \text{ dar } a_{cm} = F/m.$$

Rezultă:

$$FR_0 = I'F/mR_{cm}, \quad R_0 = I'/mR_{cm},$$

adică forța trebuie aplicată în centrul de oscilație (ciocnire):

$$R_0 = \frac{I'}{mR_{cm}} = \frac{2}{3} l,$$

(lungimea redusă a pendulului fizic).

3.11.2. Aplicăm ecuația $\vec{H} = m\Delta\vec{v}_{cm}$, ($\vec{H}$ — impulsul forței aplicate):

$$H_x = -mv_0 \cos\alpha, \quad H_y = m\omega Re_0 - m(v_0 \sin\alpha + \omega_0 R_0)$$

și ecuația $\vec{K} = \Delta\vec{S}$ (față de CM) ($\vec{K}$ — momentul impulsului forței aplicate):

$$-H_y R_0 = I_0(\omega - \omega_0), \quad I_0 = mr_g^2 - mR_0^2,$$

de unde rezultă:

$$\omega = \omega_0 + \frac{1}{r_g^2} v_0 R_0 \sin \alpha.$$

3.11.3. $Hh = I\omega$, $\frac{1}{2} I\omega^2 = G\frac{l}{2}(1 - \cos\alpha) = Gl\sin^2\alpha$, $I = \frac{1}{3} ml^2$, de unde

$$H = G\frac{l}{h}\sqrt{\frac{2l}{3g}}\sin\frac{\alpha}{2}.$$

Aplicație numerică: $H = 0{,}10$ N · s.

3.11.4. $H = mv_c$, $Hb = I_0\omega$, $I_0 = mr_g^2$;

$$\overline{CO'} = v_c/\omega = \frac{I_0}{mb} = r_g^2/b = r_g^2/\overline{CO}.$$

O' este centrul de oscilație (ciocnire) față de O.

Reciproc, O este centrul de oscilație (ciocnire) față de O': $\overline{CO}\cdot\overline{CO'} = r_g^2$.

Evident, punctul căutat este O (dacă privim procesul lovirii inversat în timp).

3.11.5. $m(v - v')h = I\omega$ sau $mvh = I'\omega$, $I' = I + mh^2$, $v' = \omega h$, $\frac{1}{2} I'\omega^2 = (MR_0 + mh)g(1 - \cos\alpha) = 2(MR_0 + mh)g\sin^2\frac{\alpha}{2}$, de unde

$$v = 2\sin\frac{\alpha}{2}\cdot\sqrt{g(h + M\overline{R_0}/m)\,(1 + I/mh^2)}.$$

Aplicație numerică:

$$v = 2\sin\frac{\alpha}{2}\sqrt{gl\left(\frac{2}{3} + \frac{M}{2m}\right)\left(1 + \frac{3M}{4m}\right)} \cong \sin\frac{\alpha}{2}\sqrt{\frac{3gl}{2}}\cdot\frac{M}{m} = 420 \text{ m/s}.$$

3.11.6. 1) $v_0 = \sqrt{2gh}$, $H = -mv + mv_0$, $Hb = I\omega$, $I = \frac{1}{12} ml^2$, $v = \omega b$, de unde

$$\omega = v_0\frac{b}{b^2 + l^2/12}, \quad v = v_0\frac{b^2}{b^2 + l^2/12}.$$

2) Trebuie ca $v_0 = \omega\left(\frac{l}{2} + b\right)$, de unde $b = l/6$, adică în centrul de oscilație (ciocnire) față de capătul considerat, ceea ce era evident de la problema 3.11.1.

3.11.7. $H'l = I\omega_1$, $I = \frac{1}{3} ml^2$,

$$H' \frac{l}{2} = I_0 \omega_2, \quad I_0 = \frac{1}{12} ml^2,$$

$$H - H' = mv, \quad v = \omega_1 l + \omega_2 \frac{l}{2},$$

de unde

$$\omega_1 = \frac{3}{7} \frac{H}{ml} \quad \omega_2 = 2\omega_1 = \frac{6}{7} \frac{H}{ml}, \quad v = \frac{6}{7} \frac{H}{m}.$$

Aplicație numerică: $\omega_1 = 2{,}0$ rad/s, $\omega_2 = 4{,}0$ rad/s, $v = 4{,}0 \frac{\text{m}}{\text{s}}$.

3.11.8. În varianta (*a*):

$$-HR_1 = I_1(\omega_1' - \omega_1), \; HR_2 = I_2(\omega_2' - \omega_2), \; \omega_1' R_1 = \omega_2' R_2,$$

de unde

$$n_1' = R_2 A, \; n_2' = R_1 A, \text{ unde } A = \frac{n_1 I_1 R_2 + n_2 I_2 R_1}{I_1 R_2^2 + I_2 R_1^2},$$

$$Q = \frac{1}{2} I_1 \omega_1^2 + \frac{1}{2} I_2 \omega_2^2 - \frac{1}{2} I_1 \omega_1'^2 - \frac{1}{2} I_2 \omega_2'^2 =$$

$$= \frac{1}{2} \frac{I_1 I_2}{I_1 R_2^2 + I_2 R_1^2} (\omega_1 R_1 - \omega_2 R_2)^2.$$

În varianta (*b*):

$$-HR_1 = I_1(\omega_1' - \omega_1), \quad -HR_2 = I_2(\omega_2' - \omega_2), \quad \omega_1' R_1 = -\omega_2' R_2,$$

de unde se vede că soluția se obține din varianta (*a*) schimbînd pe R_2 în $-R_2$.

Aplicație numerică:

$$A = \frac{n_1 m_1 R_1 + n_2 m_2 R_2}{(m_1 + m_2) R_1 R_2} = 32 \frac{\text{rot}}{\text{m} \cdot \text{s}},$$

$$n_1' = 1{,}6 \text{ rot/s}, \; n_2' = \pm 3{,}2 \text{ rot/s};$$

$$Q = \frac{1}{4} \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} (\omega_1 R_1 - \omega_2 R_2)^2 = 30{,}8 \text{ J}.$$

3.12. Giroscop

3.12.1. Asupra lagărelor se exercită forțe de reacțiune giroscopice cu momentul $\vec{M}' = -\vec{M} = -\vec{\Omega}\times\vec{\omega}I$, ($\vec{M}$ — momentul forțelor exercitate asupragi roscopului).

$$M' = \Omega\omega I, \quad M' = F'l, \quad \Omega = v/R,$$

de unde

$$F' = 2\pi\, nvI/Rl = 6{,}28 \text{ kN}.$$

3.12.2. $\vec{M} = \vec{\Omega} \times \vec{\omega}I$, $M = \Omega\omega I \sin\alpha$;

dar $M = mgR_0 \sin\alpha$, de unde

$$\Omega = \frac{mg\,R_0}{\omega I}, \quad T = 4\pi^2 nI/mgR_0 = 1{,}6 \text{ s}.$$

Capitolul 4

STATICA

4.1. Din condiția de echilibru a felinarului, găsim:

$$T_2 = \frac{G_0}{2h}(L^2 + h^2)^{1/2}. \tag{1}$$

Scriem condițiile de echilibru ale unuia din stîlpi:

$$\begin{aligned} T_2 h(L^2 + h^2)^{-1/2} + N - G - T_1 \sin\alpha = 0, \\ F + T_2 L(L^2 + h^2)^{-1/2} - T_1 \cos\alpha = 0 \end{aligned} \tag{2}$$

și pentru momentele față de baza stîlpului

$$2T_2 LH(L^2 + h^2)^{-1/2} - T_1 H \cos\alpha = 0, \tag{3}$$

în care F este forța de reacțiune a solului, aplicată la baza stîlpului. Găsim:

$$T_1 = \frac{G_0 L}{h\cos\alpha}, \quad F = \frac{G_0 L}{2h}$$

și este evident că numai deplasînd poziția firului pe stîlp (și nu modificînd unghiul de prindere pe sol), putem să anulăm forța F. Aceasta se anulează ancorînd stîlpul la înălțimea H.

4.2. Tensiunile din ancore se compun în planul stîlpilor și rezultă, conform notațiilor de la problema 4.1:

$$T_1 = \frac{G_0 L}{4h}\left(\cos^2\beta - \frac{H^2}{l^2}\right)^{-1/2}, \quad F = 0.$$

4.3. Unghiul este de 1'02'', ($\operatorname{tg}\alpha = \mu$); degajarea de căldură are loc datorită frecărilor produse de forța centrifugă, mult mai mare decît cele produse de greutatea axului.

Cantitatea de căldură este, în fiecare secundă:

$$P = \mu m\omega^3 \delta R = 74\ \text{kW}.$$

Se observă că aceasta este foarte mare, deși pentru asigurarea unor frecări atît de mici se folosesc lagăre cu rulmenți. Încălzirea sistemului este de 0,05°C pe secundă.

4.4. Rezultanta este aplicată la 1/3 din cateta orizontală, măsurată de la fața verticală a prismei, în planul de simetrie.

4.5. Condițiile de echilibru se scriu:

$$N_2 - \mu N_1 = 0, \tag{1}$$

$$\mu N_2 + N_1 - G - G_0 = 0, \tag{2}$$

$$2N_2 l \sin\alpha - 2\mu N_1 l \cos\alpha + G_0 l \cos\alpha + 2Gl\cos\alpha - 2Gh \operatorname{tg}\alpha = 0, \tag{3}$$

din care obținem:

$$h = \frac{l\cos\alpha}{1+\mu^2}\left[\mu\left(1+\frac{G_0}{G}\right) - \frac{G_0}{2G}\operatorname{ctg}\alpha + \left(1+\frac{G_0}{2G}\right)\mu^2\operatorname{ctg}\alpha\right].$$

4.6. $$h = \frac{lG}{2ES}.$$

4.7. $$a = \left|\frac{T_r^2 - G^2}{m}\right| = 10\ \mathrm{m/s^2}.$$

4.8. $$F = \frac{1}{E}S(t - t_0)\alpha.$$

4.9. Dacă notăm unghiul deschiderii acoperișului cu 2α:

$$F = \frac{G}{4}\operatorname{tg}\alpha.$$

4.10. Dacă notăm cu l lungimea unei cărți de joc, atunci:

$$L = 2l(1 + 4\mu^2)^{-1/2}.$$

4.11. Fie l_1 și l_2 lungimile inițiale ale resorturilor și x poziția lui m_0, măsurată de la primul resort:

$$x = \frac{(2k_2 - k_1)\,mgl + 2k_2 m_0 gl + 2k^2 l(l_1 - l_2)}{2(k_1 + k_2)\,m_0 g}.$$

4.12. $$F = \frac{km^2}{a^2}\sqrt{6},$$

k fiind constanta atracției universale.

4.13. $$F = \frac{km^2}{a^2}\left(\sqrt{3} + \sqrt{\frac{3}{2}} + \frac{1}{3}\right).$$

4.14. $$F_1 = \frac{km^2}{a^2}.$$

$$F_2 = \frac{km^2}{a^2}\left(1 + \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{9}\right).$$

4.15. $$a = g\left(\frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2}\right)^2$$

Se calculează coordonata, y, a centrului de greutate a celor două greutăți pentru o poziție oarecare și se derivează de două ori, în raport cu timpul.

4.16. În orice punct al curbei, asupra corpului acționează greutatea, reacțiunea normală și forța de frecare, care trebuie să împiedice alunecarea punctului material.

Într-un sistem cartezian de axe de coordonate:

$$F \sin \alpha - G + N \cos \alpha = 0, \tag{1}$$

$$F \cos \alpha - N \sin \alpha = 0 \tag{2}$$

sau

$$\operatorname{tg} \alpha = y'(x) \leqslant \frac{\mu}{\sqrt{1 + \mu^2}}.$$

4.17. Alegem axa de simetrie a figurii drept axă Oz, atunci:

$$z = \frac{\iiint_V z \, dx \, dy \, dz}{\iiint_V dx \, dy \, dz}.$$

Trecînd la coordonate sferice:

$$z = \rho \cos \theta,$$

$$dx \, dy \, dz = \rho^2 \sin \theta \, d\rho \, d\varphi \, d\theta$$

$$z = \frac{\int_0^R \int_0^{\pi - 2a} \int_0^{2\pi} \rho^3 \cos \theta \sin \theta \, d\rho \, d\varphi \, d\theta}{\int_0^R \int_0^{\pi - 2a} \int_0^{2\pi} \rho^2 \sin \theta \, d\rho \, d\varphi \, d\theta} = \frac{3R}{4} \sin^2 \alpha.$$

4.18. Folosind coordonatele sferice, obținem $r = 1\,600$ km, pe raza care înțeapă ecuatorul la 8°20'V.

4.19. Separăm figura într-un cilindru de înălțime z_2 ($z_2 < z_1$) și într-o jumătate de cilindru, delimitată de planul care taie cilindrul mare sub unghiul α.

Să calculăm poziția centrului de greutate pentru figura superioară; volumul acesteia este: $V_2 = \frac{1}{2} \pi R^2 (z_1 - z_2)$.

$$x_2' = 0,$$

$$y_2' = \frac{\int_{-R}^{+R} y \, dy \int_{-\sqrt{R^2 - y^2}}^{+\sqrt{R^2 - y^2}} dx \int_0^{\frac{z_1 - z_2}{2R}} \int_0^{(y+R)} dz}{V_2} = \frac{R}{4}$$

și cu totul similar,

$$z_2' = \frac{5}{16} (z_1 - z_2).$$

Combinînd aceste rezultate cu cele, simple, pentru cilindrul inferior, obținem:

$$x_0 = 0,$$

$$y_0 = \frac{z_1 - z_2}{z_1 + z_2}\frac{R}{4},$$

$$z_0 = \frac{5(z_1 - z_2)^2 + 16z_1^2}{16(z_1 + z_2)}.$$

4.20. Folosind formula barometrică:

$$h = \frac{RT}{\mu g} = 90 \text{ km}.$$

4.21. Vom lucra în coordonate sferice și vom ține seama că domeniul de variație al lui z începe de la suprafața Pămîntului.

$$z_0 = \frac{1}{2a}\frac{(Ra+1)^3 + 3Ra + 5}{(Ra+1)^2 + 1} = \frac{R}{2}; \quad a = \frac{g}{RT}.$$

4.22. Scriem ecuațiile de echilibru ale axului:

$$F - N\sin\alpha + F'\cos\alpha = 0, \tag{1}$$

$$N\cos\alpha - G + F'\sin\alpha = 0, \tag{2}$$

$$F - F' = 0; \tag{3}$$

de aici:

$$F = -\frac{G\sin\frac{\alpha}{2}}{\cos\frac{\alpha}{2}}, \tag{4}$$

cu condiția ca $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} < \mu$; $\alpha_{max} = 2\operatorname{arctg}\mu$.

4.23. $$x = \frac{Pl}{2\sqrt{4Q^2 - P^2}}.$$

4.24. $N_1 = G\sin\alpha$, $N_2 = G\cos\alpha$.

4.25. $$N = \frac{GD}{2\sqrt{D^2 - l^2}}$$

4.26. $$T = \frac{Gl}{4\sqrt{l^2 - \left(\frac{D-d}{2}\right)^2}}.$$

4.27. Deplasarea barei de la poziția perpendiculară pe muchia de sprijin nu aduce o soluție nouă. Atunci, scriem ecuațiile de echilibru în cazul așezării barei perpendicular pe muchie:

$$R - G + N\cos\alpha + \mu N\sin\alpha = 0, \tag{1}$$

$$N\sin\alpha - \mu R - \mu N\cos\alpha = 0, \tag{2}$$

$$2hN\sin\alpha - lG\cos\alpha = 0 \tag{3}$$

și

$$H_{min} = l\sin\alpha_{min}$$

cu

$$\cos\alpha_{min} = \frac{2\mu h}{l(1+\mu^2)}.$$

4.28. Pentru țeava suprapusă, condiția de echilibru se scrie imediat:

$$-G + 2N_1\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) + 2F_1\left(\frac{1}{2}\right) = 0. \tag{1}$$

Se observă că din motive de simetrie, între țevile inferioare nu există frecare și că de asemenea nu există componentă de apăsare între ele. În această situație:

$$N_0 - G - N_1\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}F_1 = 0, \tag{2}$$

$$\frac{1}{2}N_1 - F_0 - F_1\frac{\sqrt{3}}{2} = 0, \tag{3}$$

$$F_0 - F_1 = 0, \tag{4}$$

ceea ce ne conduce la:

$$N_0 = \frac{3}{2}G,\ N_1 = \frac{1}{2}G,\ F_0 = F_1 = \frac{G(2-\sqrt{3})}{2}, \tag{5}$$

deci:

$$\frac{F_0}{N_0} = \frac{2-\sqrt{3}}{3};\quad \frac{F_1}{N_1} = 2-\sqrt{3} \tag{6}$$

a) Dacă: $\mu_0 > \frac{2-\sqrt{3}}{3}$, $\mu_1 > 2-\sqrt{3}$, sistemul este stabil.

b) Dacă: $\mu_0 > \frac{2-\sqrt{3}}{3}$, $\mu_1 < 2-\sqrt{3}$, avem alunecare între țevi și țeava de jos, din dreapta, se rostogolește în sensul acelor de ceasornic, iar cea din stînga, în sens invers acelor de ceasornic.

c) Dacă $\mu_0 < \frac{2-\sqrt{3}}{3}$, $\mu_1 > 2-\sqrt{3}$, avem alunecare între țevi și sol, și țevile inferioare se rostogolesc în sens invers, ca în cazul precedent.

d) Dacă $\mu_0 < \frac{2-\sqrt{3}}{3}$, $\mu_1 < 2-\sqrt{3}$, avem alunecare fără rostogolire și țevile inferioare sînt ejectate lateral de apăsarea țevii de deasupra.

4.29. Apăsările sînt nedeterminate în poziția de echilibru. Se poate stabili unghiul limită minim de echilibru:

$$\operatorname{tg} \alpha_{min} = \frac{1-\mu_1\mu_2}{1+2\mu_2+\mu_1\mu_2}.$$

4.30. Forța este nedeterminată. Suma forțelor de reacțiune, incluzînd și cele provenite din frecarea cu podeaua este F.

4.31. $$\operatorname{ctg} \varphi \geqslant \frac{\sqrt{R^2-L^2}(1+\mu^2)}{R^2\mu} - \mu.$$

4.32. $$h \leqslant r\sqrt{\frac{\rho_1}{2\rho_2}}.$$

4.33. $$h \leqslant \sqrt{3}r.$$

Capitolul 5

ATRACȚIA UNIVERSALĂ

5.1. Legile lui Kepler

5.1.1. Pentru planetă și Pămînt, relația (5.2) devine:

$$\left(\frac{T_1}{T}\right)^2 = \left(\frac{a_1}{a}\right)^3 \Rightarrow T_1 = T\left(\frac{a_1}{a}\right)^{3/2},$$

unde T + a sînt, respectiv, perioada și semiaxa mare a orbitei pămîntești, iar T_1 și a_1 sînt mărimile corespunzătoare planetei. Dacă notăm $a_1 = a + x$ și $x < a$, atunci putem scrie:

$$T_1 \approx T\left(1 + \frac{3}{2}\frac{x}{a}\right) \Rightarrow x = \frac{2}{3}a\,\frac{T_1 - T}{T} = 2 \cdot 10^7 \text{km}.$$

5.1.2. Pentru satelit și Lună, relația (5.28) devine:

$$\left(\frac{T_1}{T}\right)^2 = \left(\frac{a_1}{a}\right)^3 \Rightarrow a_1 = a\left(\frac{T_1}{T}\right)^{2/3},$$

unde T și a sînt, respectiv, perioada și semiaxa mare a orbitei Lunii, iar T_1 și a_1 mărimile corespunzătoare primului satelit. Atunci:

$$2a_2 = 2a\left(\frac{T_1}{T}\right)^{2/3} + x = 1{,}46 \cdot 10^4 \text{ km}.$$

Scriind pe rînd relația (5.2) pentru fiecare satelit și Lună se obține:

$$\left(\frac{T_2}{T_1}\right)^2 = \left(\frac{a_2}{a_1}\right)^3 \Rightarrow T_2 = T_1\left(\frac{a_2}{a_1}\right)^{3/2}.$$

Comparînd cele două relații rezultă:

$$T_2 = T_1\left[1 + \frac{x}{2a}\left(\frac{T}{T_1}\right)^{2/3}\right]^{3/2} = 104 \text{ min}.$$

5.1.3 Notînd cu T și a perioada, respectiv, semiaxa mare a orbitei lunare și cu T_1 și $a_1 = R_p + \frac{r_{min} + r_{max}}{2}$, aceleași mărimi corespunzătoare navei cosmice, legea a III-a a lui Kepler devine:

$$\left(\frac{T_1}{T}\right)^2 = \left(\frac{a_1}{a}\right)^3,$$

unde R_p este raza Pământului, iar r_{min} și r_{max} sînt respectiv, distanța minimă și maximă la care se află nava cosmică față de suprafața Pământului. Introducînd expresia lui a_1 în relația de sus rezultă:

$$T_1 = T\left(\frac{R_p}{a} + \frac{r_{min} + r_{max}}{2a}\right)^{3/2} = 88 \text{ min}.$$

5.1.4. Notînd cu x_2 și v_2, respectiv, distanța de la centrul de forță la a doua poziție extremă a corpului pe traiectorie și viteza acestuia în poziția respectivă ca în figura 5.1.4 R, atunci folosind relația (5.1) se obține:

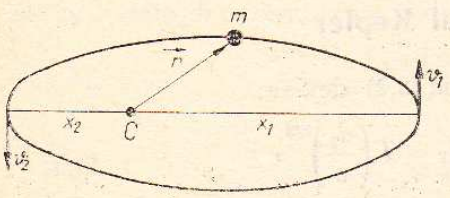


Fig. 5.1.4 R

$$mrv = \text{const} \Rightarrow v_1 x_1 = v_2 x_2.$$

Legea conservării energiei în cele două poziții extreme se scrie:

$$\frac{mv_1^2}{2} - \frac{k}{x_1} = \frac{mv_2^2}{2} - \frac{k}{x_2},$$

de unde rezultă:

$$v_2^2 = \frac{2kx_1}{mx_2(x_2 + x_1)}.$$

Ținînd seama că $v_1^2 = \frac{k}{2mx_1}$ și utilizînd relațiile obținute rezultă:

$$x_2 = \frac{x_1}{3} = 100 \text{ km}.$$

Introducînd expresia lui x_2 în expresia lui v_2 avem:

$$v_2 = 3v_1 = 30 \frac{\text{km}}{\text{s}}.$$

5.2. Legea atracției universale. Cîmpul și potențialul gravitațional

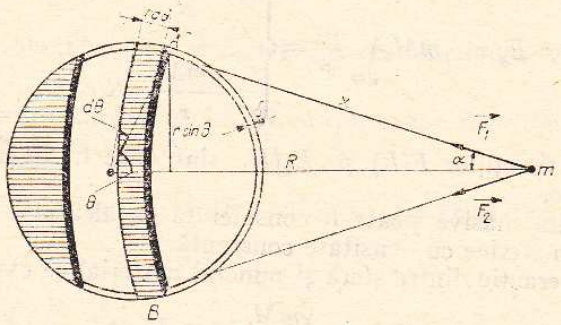
5.2.1. *a*) Fie sfera de rază r și pătura sferică de grosime $\delta \ll r$ ca în figura 5.2.1 R, *a*. Considerăm două elemente de volum ale stratului sferic A și B simetrice care interacționează cu punctul material de masă m și atunci forța rezultantă se exprimă: $\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2$. Elementul de volum al stratului sferic fiind $dV = 2\pi r^2 \delta \sin\theta \, d\theta$, elementul de masă are expresia: $dM = \rho dV = 2\pi r^2 \delta \rho \sin\theta \, d\theta$, unde ρ este densitatea. Forța elementară rezultantă: $dF = -\frac{\gamma m \, dM}{x^2} \cos\alpha = -\frac{2\pi\gamma r^2 \rho \delta}{x^2} \cos\alpha \sin\theta \, d\theta$ unde am considerat numai proiecția lui $\vec{F}$ pe direcția dreptei care unește centrul sferei cu masa punctuală, proiecțiile pe un plan perpendicular pe această direcție anulîndu-se reciproc din cauza simetriei.

Variabilele x, α și θ nu sînt independente, între ele fiind relațiile:

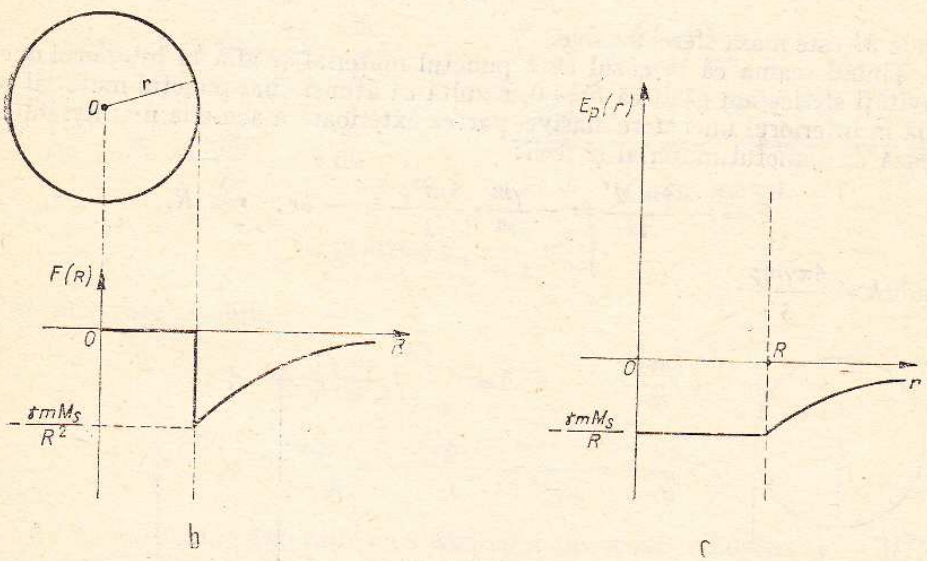
$$\cos\alpha = \frac{R - r\cos\theta}{x},$$

$$x^2 = R^2 + r^2 - 2rR\cos\theta \Rightarrow r\cos\theta = \frac{R^2 + r^2 - x^2}{2R},$$

$$x\,\mathrm{d}x = rR\sin\theta\,\mathrm{d}\theta \Rightarrow \sin\theta\,\mathrm{d}\theta = \frac{x\,\mathrm{d}x}{Rr}.$$



a



b c

Fig. 5.2.1 R

Ținînd seama de aceste relații se obține:

$$\mathrm{d}F = -\frac{\pi\gamma m\rho\delta}{R^2} r\left(\frac{R^2 - r^2}{x^2} + 1\right)\mathrm{d}x.$$

Aceasta este expresia forței de interacție dintre fîșia circulară și punctul material. Sumînd după fîșiile stratului sferic rezultă:

$$F = -\frac{\pi\gamma\rho\delta \cdot m}{R^2} r\int_{R-r}^{R+r}\left(\frac{R^2 - r^2}{x^2} + 1\right)\mathrm{d}x = -\frac{\gamma m M_s}{R^2}; \quad R > r,$$

unde $M_s = 4\pi r^2\rho\delta$ este masa stratului sferic.

În cazul în care particula de masă m se află în interiorul cavității sferice, se obține rezultatul:

$$F = -\frac{\pi\gamma\rho\delta \cdot m}{R^2} r \int_{r-R}^{r+R} \left(\frac{R^2 - r^2}{x^2} + 1 \right) dx = 0; \; R < r.$$

Utilizînd relația (5.14) pentru energia potențială se obține:

$$E_p = \gamma m M_s \int_{\infty}^{R} \frac{dr}{r^2} = \begin{cases} -\dfrac{\gamma m M_s}{R}, R > r; \\ -\dfrac{\gamma m M_s}{r}, R < r. \end{cases}$$

b) Graficele funcțiilor $F(R)$ și $E_p(R)$ sînt date în figura 5.2.1R, *b* și figura 5.2.1 R, *c*.

5.2.2. *a*) Sfera masivă poate fi considerată ca alcătuită dintr-un număr mare de straturi sferice cu densitate constantă.

Forța de interacție dintre sferă și punctul material se exprimă:

$$F = -\frac{\gamma m M}{r^2}; \; r > R,$$

unde M este masa sferei masive.

Ținînd seama că în cazul cînd punctul material se află în interiorul unei cavități sferice am găsit că $F = 0$, rezultă că atunci cînd punctul material se află în interiorul unei sfere masive, partea exterioară a acesteia nu interacționează cu punctul material și deci:

$$F = -\frac{\gamma m M'}{r^2} = -\frac{\gamma m}{r^2} \cdot \frac{4\pi r^3 \rho}{3} = -kr; \quad r < R,$$

unde $k = \dfrac{4\pi\gamma m\rho}{3}$.

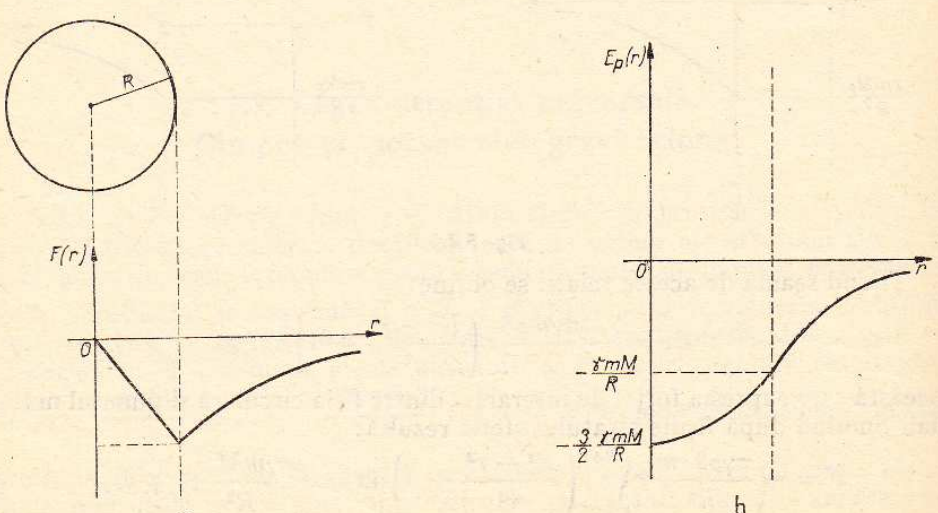


Fig. 5.2.2 R

Utilizînd relația (5.14), pentru energia potențială se obține:

$$E_p(r) = \gamma mM \int_{\infty}^{r} \frac{dr}{r^2} = -\frac{\gamma mN}{r}; \quad r > R,$$

$$E_p(r) = -\int_{\infty}^{r} F\,dr = \gamma mM \int_{\infty}^{R} \frac{dr}{r^2} + k\int_{R}^{r} r\,dr = -\frac{3}{2}\frac{\gamma mM}{R} +$$

$$+\frac{1}{2}\frac{\gamma mM}{R^3}r^2; \; r < R.$$

b) Graficele funcțiilor $F(r)$ și $E_p(r)$ sînt date în figura 5.2.2R, *a* și figura 5.2.2.R, *b*.

5.2.3. Se observă din figura 5.2.3R că din cauza simetriei, proiecțiile dF_x ale forțelor se anulează. Deci:

$$|d\vec{F}| = dF_y = dF\cos\theta = -\frac{\gamma m\rho}{r^2}\cos\theta\,dx.$$

Dar

$$r^2 = \left(\frac{R}{\cos\theta}\right)^2;$$

$$x = R\,\mathrm{tg}\,\theta \Rightarrow \frac{dx}{r^2} = \frac{d\theta}{R}$$

și deci

$$|d\vec{F}| = \frac{\gamma m\rho}{R^2}\cos\theta\,d\theta$$

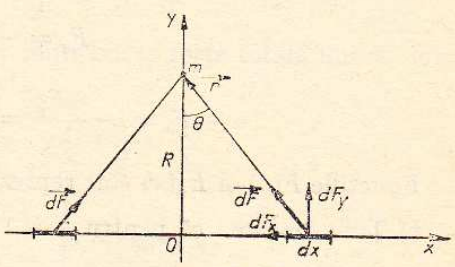


Fig. 5.2.3 R

pentru $\theta \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$.

Prin integrare se obține:

$$F = -\frac{\gamma m\rho}{R}\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\cos\theta\,d\theta = -\frac{2\gamma m\rho}{R},$$

$$\rho = \frac{RF}{2\gamma m} = \frac{4\cdot 6{,}67\cdot 10^{-9}}{2\cdot 6{,}67\cdot 10^{-11}\,25} = 8\,\frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{m}}.$$

5.2.4. *a*) Considerăm firul cu distribuția de masă omogenă $\rho = M/2l$, situat ca în figura 5.2.4R, *a*. Energia potențială de interacție dintre un element dy al firului și masa m se exprimă:

$$dE_p = -\frac{\gamma m\rho\,dy}{r}; \quad r = (x^2 + y^2)^{1/2}.$$

Pentru întreg firul se obține:

$$E_p(x) = -\frac{\gamma mM}{2l}\int_{-l}^{l}\frac{dy}{(x^2+y^2)^{1/2}} = -\frac{\gamma mM}{l}\ln\left[\frac{(x^2+l^2)^{1/2}+l}{x}\right],$$

unde am utilizat schimbarea de variabilă: $y = x\,\mathrm{tg}\,\theta$.

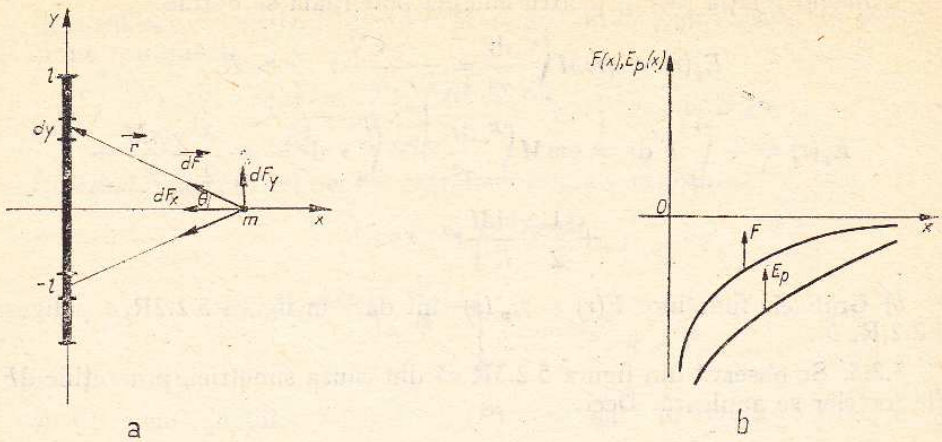


Fig. 5.2.4 R

Utilizînd relația (5.13), forța se exprimă astfel:

$$F_y = -\frac{\partial E_p}{\partial y} = 0,$$

$$F_x = -\frac{\partial E_p}{\partial x} = -\frac{\gamma m M}{x(x^2 + l^2)^{1/2}}.$$

Funcțiile $F(x)$ și $E_p(x)$ sînt reprezentate grafic în figura 5.2.4R, *b*.

b) Ținînd seama că pentru $\frac{l}{x} \ll 1$ se pot face dezvoltările în serie:

$$\ln\left[\frac{l}{x} + \left(1 + \frac{l^2}{x^2}\right)^{1/2}\right] \approx \ln\left[1 + \left(\frac{l}{x}\right)^2\right] \approx \frac{l}{x} - \left(\frac{l}{x}\right)^2 + \cdots$$

și

$$\frac{1}{x^2}\left(1 + \frac{l^2}{x^2}\right)^{-1/2} = \frac{1}{x^2}\left[1 - \frac{1}{2}\left(\frac{l}{x}\right)^2 + \cdots\right],$$

atunci oprind numai termenii lineari în $\frac{l}{x}$, obținem:

$$E_p \approx -\frac{\gamma m M}{x} = -\frac{2\gamma m \rho l}{x} = -5{,}34 \cdot 10^{-10}\ \text{J},$$

$$F = -\frac{\gamma m M}{x^2} = -\frac{2\gamma m \rho l}{x^2} = -2{,}67 \cdot 10^{-11}\ \text{N}.$$

5.2.5. Considerăm firul orientat pe direcția Ox ca în figura 5.2.5R. Forța de interacție dintre un element dx al firului și punctul material, conform relației (5.3) se exprimă:

$$dF = -\frac{\gamma m \rho\, dx}{(x_1 - x)^2}.$$

Forța de interacție dintre fir și punctul material se obține prin integrare:

$$F = -\gamma m \rho \int_0^l \frac{dx}{(x_1 - x)^2} = -\frac{\gamma \rho m l}{x_1(x_1 - l)}.$$

Atunci energia potențială are expresia:

$$E_p = -\gamma\rho m\int_0^l \frac{dx}{x_1 - x} = -\gamma\rho m \ln\left(\frac{x_1 - l}{x_1}\right).$$

Fig. 5.2.5 R

Combinînd formulele obținute rezultă:

a) $$E_p = -\frac{Fx_1(x_1 - l)}{l}\ln\left(\frac{x_1 - l}{x_1}\right) = 4F\ln 2 = -1{,}84\cdot 10^{-12}\ \text{J};$$

b) $$\rho = \frac{|\vec{F}|x_1(x_1 - l)}{\gamma m l} = 0{,}2\ \frac{\text{kg}}{\text{m}}.$$

5.2.6. *a)* Fie ca în figura 5.2.6*R*, *a* un element dy din inelul considerat și atunci forța de interacție dintre acesta și punctul material este de forma:

$$dF_1 = -\frac{\gamma m\rho\pi r^2\, dy}{d^2}.$$

Se observă că din cauza simetriei vor contribui la forța totală numai componentele de-a lungul axei inelului și deci:

$$dF = dF_1\cos\alpha = dF_1\frac{x}{d}.$$

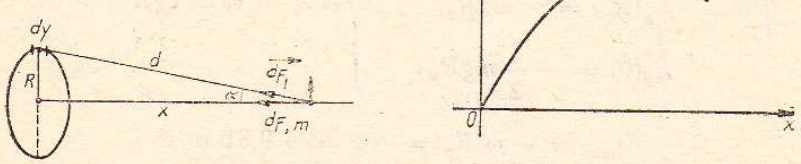
Forța totală se obține prin integrare:

$$F = \frac{\gamma m\rho\pi r^2 x}{d^2}\int_0^{2\pi R} dy = \frac{2\pi^2\gamma\rho m r^2 x R}{(R^2 + x^2)^{3/2}}.$$

Graficul funcției $F(x)$ este dat în figura 5.2.6 R, *b*.

b) Punînd condiția de maxim pentru forță se găsește că pentru $x_{max} = \frac{R}{\sqrt{2}}$, acesta își atinge valoarea maximă și anume:

$$F_{max} = \frac{4\pi^2\gamma\rho m r^2}{3\sqrt{3}R}.$$



a b

Fig. 5.2.6 R

De asemenea:

$$F_1 = F\left(\frac{x_{max}}{2}\right) = \frac{16\pi^2\gamma\rho m r^2}{27R},$$

de unde

$$R = \frac{16\pi^2\gamma\rho m r^2}{27F_1} \approx 0{,}57 \text{ m},$$

$$\frac{F_{max}}{F_1} = \frac{3\sqrt{3}}{4}.$$

c) $x_{max} = \dfrac{R}{\sqrt{2}} = 0{,}404$ m.

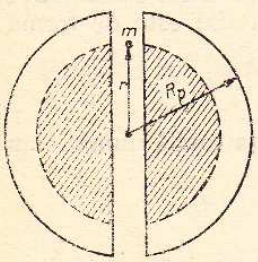


Fig. 5.2.7 R

5.2.7. *a*) Considerăm un tunel care traversează Pământul de-a lungul diametrului său ca în figura 5.2.7R. Punctul material care se găsește la un moment dat la distanța r de centru va interacționa gravitațional după legea (5.6) pentru $r < R$, adică:

$$F(r) = -kr, \text{ unde } k = \frac{4\pi m\gamma\rho}{3}.$$

Forța fiind de tip elastic, produce o mișcare oscilatorie armonică și deci:

$$r = R_p \sin(\omega t + \alpha),$$

$$v = \omega R_p \cos(\omega t + \alpha);\ \omega = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{g}{R_p}},$$

unde g este accelerația gravitațională la suprafața Pământului.

b) $$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{R_p}{g}} = 5 \cdot 10^3 \text{s} = 84{,}3 \text{ min}.$$

c) $v_{max} = \omega R_p = \sqrt{gR_p} = v_I = 7{,}9\dfrac{\text{km}}{s}$, ($v_I$ prima viteză cosmică).

Utilizînd legea conservării energiei se obține:

$$\left.\begin{aligned} E_p(R_p) &= \frac{mr_0^2}{2} + E_p(0), \\ E_p(R_p) &= -mgR_p, \\ E_p(0) &= -\frac{3}{2}mgR_p, \end{aligned}\right\} \Rightarrow v_0 = v_I = \sqrt{gR_p}.$$

d) $$a_{max} = -\omega^2 R_p = -g = -9{,}81 \text{ m/s}^2.$$

e) $$E = E_c + E_p = \frac{m\omega^2 R_p^2}{2} = \frac{mgR_p}{2} = 3{,}12 \cdot 10^7 \text{ J}.$$

5.2.8. *a*) Considerăm un tunel care traversează Pămîntul după o coardă ce se află la distanța d de centru, ca în figura 5.2.8R. Se observă că în acest caz, $F_y = -ky$; $k = \frac{4\pi\gamma\rho}{3} m$. Deci, mișcarea este oscilatorie armonică și în acest caz sînt adevărate relațiile:

$$y = \sqrt{R_p^2 - d^2} \sin(\omega t + \alpha); \quad \omega = \frac{k}{m},$$

$$v = \omega \sqrt{R_p^2 - d^2} \cos(\omega t + \alpha).$$

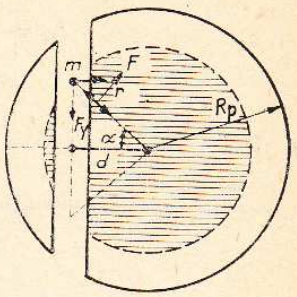


Fig. 5.2.8R

b) $$T = 2\pi \sqrt{\frac{R_p}{g}} = 84{,}3 \text{ min}.$$

c) $$v_{max} = \omega \sqrt{R_p^2 - d^2} = \frac{v_I}{2}$$

(v_I, prima viteză cosmică)

$$a_{max} = -\omega^2 R_p \left(1 - \frac{d^2}{R_p^2}\right)^{1/2} = -\frac{g}{\sqrt{2}}.$$

d) $$E = \frac{m\omega^2}{2}(R_p^2 - d^2) = \frac{mgR_p}{2}\left(1 - \frac{d^2}{R_p^2}\right) = \frac{mgR_p}{4} = 7{,}8 \cdot 10^6 \text{ J}.$$

5.2.9. Perioadele de la punctele *a*), *b*), *c*) și *d*) trebuie să fie egale, deoarece mișcarea oscilatorie armonică este proiecția mișcării circulare uniforme pe un diametru. În cazul de față, cercul are raza egală cu raza Pămîntului. La punctul *d*), datorită faptului că lungimea pendulului este infinită, mișcarea lui de oscilație în cîmpul gravitațional real poate fi aproximată cu mișcarea de rotație în jurul Pămîntului la suprafața sa.

5.2.10. Fie o sferă de rază R în care s-a practicat o cavitate ca în figura 5.2.10R și la distanța x față de centrul ei, un punct material de masă m. Luînd în seamă faptul că forțele gravitaționale respectă principiul suprapunerii, putem obține următoarele rezultate.

a) Punctul material de aceeași parte a cavității:

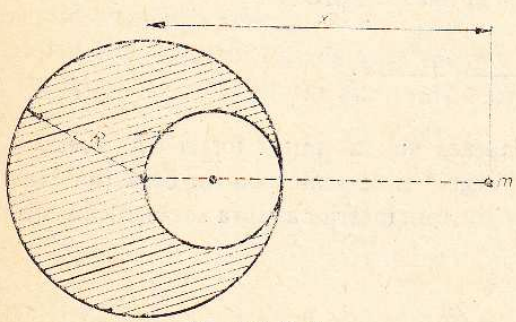


Fig. 5.2.10 R

$$F = F_1 - F_2,$$

unde

$$F_1 = -\frac{\gamma mM}{x^2};$$

$$F_2 = -\frac{\gamma mM}{8\left(x - \frac{R}{2}\right)^2}$$

și deci

$$F = -\frac{\gamma mM}{8} \cdot \frac{7x^2 - 8xR + 2R^2}{x^2\left(x - \frac{R}{2}\right)^2}.$$

b) Punctul material situat în partea opusă cavității:

$$F = F_1 - F_2,$$

unde

$$F_1 = -\frac{\gamma mM}{x^2}; \quad F_2 = -\frac{\gamma mM}{8\left(x + \frac{R}{2}\right)^2}$$

și deci

$$F = -\frac{\gamma mM}{8} \frac{7x^2 + 8xR + 2R^2}{x^2\left(x + \frac{R}{2}\right)^2}.$$

5.2.11. Considerăm particula de masă m situată în cele trei poziții ca în figura 5.2.11. Pe baza relațiilor (5.5) se obțin rezultatele:

a) $$F_1 = -\frac{\gamma m (m_1 + m_2)}{r_1^2};$$

b) $$F_2 = -\frac{\gamma m m_1}{r_2^2};$$

c) $$F_3 = 0.$$

5.2.12. *a*) Fie sfera omogenă de rază R și densitate ρ ca în figura 5.2.12R,*a*. La distanța x de centru alegem o sferă astfel încît $r < x < R$. Volumul segmentului sferic de grosime dx are expresia: $dV = 4\pi x^2 dx$ și masa lui $dm = 4\pi\rho x^2\, dx$. Sfera de rază x are masa $m = \frac{4\pi x^3}{3}\rho$. Forța gravitațională de interacție dintre masele m și dm se exprimă:

$$dF = -\frac{16\pi^2\gamma\rho^2 x^3\, dx}{3}.$$

Dar segmentul sferic nu se deplasează sub acțiunea forței dF, ceea ce înseamnă că ea este anulată de o forță egală și de semn contrar ce acționează din interior. Există deci o presiune dp dinspre interior asupra segmentului sferic de forma:

$$dp = \frac{|dF|}{S} = \frac{4\pi}{3}\gamma\rho^2 x\, dx.$$

Sfera de rază x atrage toate păturile sferice de raze $r > x$ și $r < R$. Aceste pături sferice de asemenea nu se deplasează, ceea ce înseamnă că există forțe

egale și opuse, care acționează din interior și deci presiunea totală la distanța r de centrul sferei se obține prin integrare:

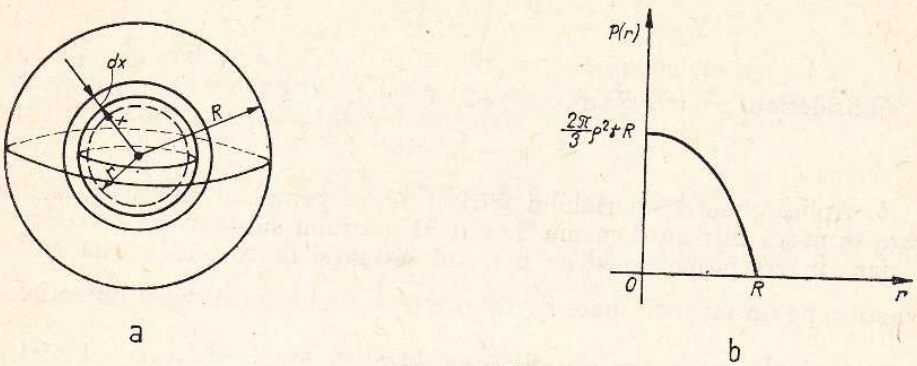


Fig. 5.2.12 R

$$p = \frac{4\pi}{3}\gamma\rho^2\int_r^R x\,dx = \frac{2\pi}{3}\gamma\rho^2(R^2 - r^2).$$

Dependența $p = p(r)$ este dată în figura 5.2.12R, *b*.

b) Punînd condiția de maxim se observă că presiunea își atinge valoarea maximă în centrul sferei ($r = 0$) și deci:

$$p_{max} = \frac{2\pi}{3}\gamma\rho^2R^2 = 1{,}7 \cdot 10^{11}\frac{\text{N}}{\text{m}^2} \approx 1{,}7 \cdot 10^6 \text{ atm}.$$

c) $$r = \frac{R}{2}.$$

5.2.13. Se utilizează relația (5.10): $E_p = -\gamma\sum_{i>j}^{8}\sum_{j=1}^{8}\frac{M_iM_j}{r_{ij}}$ în care se ține seama că $M_i = M_j$. Se observă că efectuînd sumele se obține $C_8^2 = \frac{8!}{2!\,6!} =$ $= 28$ termeni. Pentru 12 din aceștia, distanța dintre mase este latura l a cubului, pentru 12, distanța dintre mase este diagonala unei fețe, $\sqrt{2}l$ și pentru 4, distanța dintre mase este diagonala cubului, $\sqrt{3}l$. Deci:

$$E_p = -\frac{\gamma M_s^2}{l}\left(12 + \frac{12}{\sqrt{2}} + \frac{4}{\sqrt{3}}\right) =$$

$$= -\frac{4\gamma M_s^2}{l}\left(3 + \frac{3\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{3}\right) \approx 2 \cdot 10^{35}\text{ J}.$$

5.2.14. *a*) Fie o sferă omogenă de masă M și rază R ca în figura 5.2.14R și să considerăm la început energia de interacție dintre o sferă de rază $r < R$ și stratul sferic din jurul său de grosime dr, care se exprimă prin relația:

$$dE_p = -(4\pi\rho)^2\gamma\frac{r^4\,dr}{3}.$$

Energia gravitațională proprie a sferei de rază R se obține prin integrare și anume:

$$E_p = -\frac{(4\pi\rho)^2}{3}\gamma\int_0^R r^4\,dr = -\frac{3}{5}\frac{\gamma M^2}{R}.$$

Considerînd pentru Soare: $M_s \approx 2\cdot 10^{30}$ kg, $R_s \approx 7\cdot 10^8$ m, rezultă:

$$E_p \approx -2{,}3\cdot 10^{41}\ \text{J}.$$

b) Aplicăm teorema virialului potrivit căreia, pentru un sistem de particule care se mișcă într-un domeniu limitat al spațiului sub acțiunea forțelor ce variază invers proporțional cu pătratul distanței dintre ele, media energiei cinetice pe un interval mare de timp este $\frac{1}{2}$ din media energiei potențiale pe același interval de timp: $E_c = \frac{1}{2}E_p$.

Să considerăm Soarele ca fiind alcătuit din N atomi considerați ca puncte materiale. În baza legii echipartiției energiei pe grade de libertate, energia cinetică medie de translație a unui atom este $\overline{w} = \frac{3}{2}kT$, unde $k = 1{,}38\cdot 10^{-23}\ \frac{\text{J}}{\text{K}}$ este constanta Boltzmann, iar T temperatura absolută. Energia cinetică a celor N atomi este $E_c = \frac{3}{2}NkT$. Utilizînd teorema virialului se obține:

$$\frac{3}{2}NkT = \frac{1}{2}\frac{3}{5}\frac{\gamma M_s^2}{R_s};\quad T = \frac{\gamma M_s m}{5kR_s} \approx 10^7\ \text{K},$$

unde $m = \frac{M}{N} \approx 3\cdot 10^{-27}$ kg este masa unui atom.

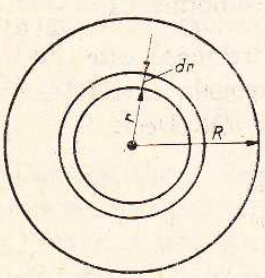


Fig. 5.2.14 R

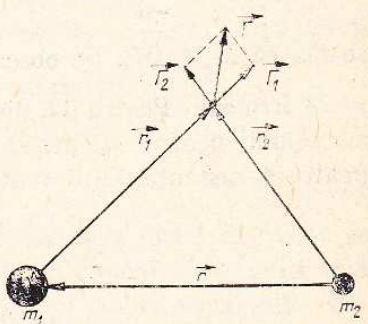


Fig. 5.2.15 R

5.2.15. *a*) Ținînd seama de relația (5.7) și potrivit notațiilor din figura 5.2.15R, intensitatea cîmpului gravitațional datorită maselor m_1 și m_2 se exprimă:

$$\vec{\Gamma}_1 = -\frac{\gamma m_1}{r_1^2}\vec{r}_{01};\quad \vec{\Gamma}_2 = -\frac{\gamma m_2}{r_2^2}\vec{r}_{02}.$$

Potrivit principiului superpoziției rezultă:

$$\vec{\Gamma} = -\gamma\left(\frac{m_1}{r_1^2}\vec{r}_{01} + \frac{m_2}{r_2^2}\vec{r}_{02}\right),$$

unde $\vec{r}_{01}$ și $\vec{r}_{02}$ sînt versorii după direcțiile ce unesc punctele în care se găsesc masele m_1 și m_2 cu punctul M în care calculăm cîmpul rezultant. Valoarea intensității cîmpului gravitațional este dată de relația:

$$|\vec{\Gamma}| = \sqrt{\Gamma_1^2 + \Gamma_2^2 + 2\Gamma_1\Gamma_2\cos\alpha} = \sqrt{\Gamma_1^2 + \Gamma_2^2} = 2{,}22 \cdot 10^{-6}\,\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{m}^2};$$

$$\cos\alpha = \frac{r^2 - r_1^2 - r_2^2}{2r_1r_2} = 0 \Rightarrow \alpha = \frac{\pi}{2}.$$

Deci $\vec{\Gamma} \perp \vec{r}$, unde $\vec{r}$ este vectorul după direcția ce unește cele două mase.

b) $$V = -\gamma\left(\frac{m_1}{r_1} + \frac{m_2}{r_2}\right) = -5{,}3 \cdot 10^{-7}\,\frac{\mathrm{J}}{\mathrm{kg}}.$$

5.2.16. *a)* $|\vec{\Gamma}| = 0$;

b) $V = -10^{-9}\,\frac{\mathrm{J}}{\mathrm{kg}}$;

c) $$L = V - V_1 = -\gamma\left(\frac{m_2}{r - r_1} + \frac{m_1}{r_1} - \frac{m_1}{r}\right) = -8{,}8 \cdot 10^{-10}\,\frac{\mathrm{J}}{\mathrm{kg}}.$$

5.3. Mișcarea corpurilor cerești

5.3.1. Combinînd legea atracției universale cu legea a II-a a dinamici rezultă:

$$\frac{\gamma m M_p}{R_p^2} = mg \Rightarrow \rho = \frac{3g}{4\pi\gamma R_p} = 5{,}5 \cdot 10^3\,\frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{m}^3}.$$

5.3.2. Utilizînd relațiile:

$$\left.\begin{aligned} g_l &= \frac{\gamma M_l}{R_l^2} = \frac{4\pi\gamma}{3} R_l\rho_l \\ g_p &= \frac{\gamma M_p}{R_p^2} = \frac{4\pi\gamma}{3} R_p\rho_p \end{aligned}\right\} \Rightarrow \frac{g_p}{g_l} = \frac{R_p\rho_p}{R_l\rho_l} = 6.$$

Deci:

$$\rho_l = 0{,}61\,\rho_p \approx 3{,}36 \cdot 10^3\,\frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{m}^3}; \quad g_l = \frac{g_p}{6} = 1{,}635\,\frac{\mathrm{m}}{s^2}.$$

5.3.3. Condiția ca Pământul să se mențină pe orbita sa în jurul Soarelui, ținînd seama că $M_p \ll M_s$, se exprimă:

$$\frac{\gamma M_s M_p}{R_{sp}^2} = \frac{M_p v^2}{R_{sp}}; \quad v = \omega R_{sp},$$

unde R_{sp} este distanța dintre centrul Pământului și centrul Soarelui. Dar $\omega = \frac{2\pi}{T}$ și accelerația de cădere liberă pe Soare, $g_s = \frac{\gamma M_s}{R_s^2}$ și atunci rezultă:

$$T = \frac{2\pi R_{sp}}{R_s}\sqrt{\frac{R_{sp}}{g_s}} = 3{,}16 \cdot 10^7 \text{ s}.$$

5.3.4. *a*) Ținînd seama de faptul că $M_p \ll M_s$ și deci masa redusă a sistemului Pământ-Soare este $\mu \approx M_p$, rezultă pentru accelerația Pământului spre Soare:

$$a = \frac{4\pi^2 R_{sp}}{T^2} \approx 6 \cdot 10^{-3} \text{ m/s}^2.$$

b) Accelerația unui corp de pe suprafața Pământului datorită atracției Soarelui are expresia:

$$a_1 = \frac{\gamma M_s}{(R_{sp} + R_p)^2} = a\left(1 \mp 2\frac{R_p}{R_{sp}} + \ldots\right); \quad a = \frac{\gamma M_s}{R_{sp}^2};$$

$$\frac{a_1 - a}{a} 100 = 2\frac{R_p}{R_{sp}} 100 = 0{,}0085\,\%.$$

5.3.5. În aproximația $M_p \ll M_s$ rezultă:

$$g_s = \frac{4\pi^3 R_{ps}^3}{T^2 R_s^2}.$$

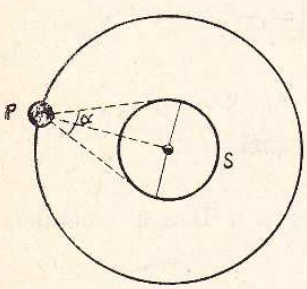


Fig. 5.3.5 R

Dar din figura 5.3.5R rezultă: $R_s = \frac{\alpha R_{ps}}{2}$ dacă $\sin\alpha \approx \alpha$ și deci:

$$\alpha \approx \frac{4\pi}{T}\left(\frac{R_{ps}}{g_s}\right)^{1/2} \approx 32'.$$

5.3.6. Deoarece masa planetei Venus $M_v \ll M_s$ și pentru sistemul Venus-Soare, masa redusă $\mu \approx M_v$ și deci:

$$\frac{\gamma M_v M_s}{R_{vs}^2} = M_v \omega^2 R_{vs},$$

unde ω este viteza unghiulară a planetei Venus pe orbita sa, iar R_{vs} este distanța dintre centrele Venus-Soare. Ținînd seama că $\omega = \frac{2\pi}{T}$ și $g_s = \frac{\gamma M_s}{R_s^2}$, rezultă:

$$R_{vs} = \left(\frac{g_s R_s^2 T^2}{4\pi^2}\right)^{1/3} \approx 1{,}08 \cdot 10^{11} \text{ m}.$$

5.3.7. $T = \frac{2\pi R_{pl}}{R_p}\sqrt{\frac{R_{pl}}{g_p}} = 2{,}36 \cdot 10^6$ s.

5.3.8. *a*) Un asemenea satelit poate fi plasat pe o orbită pentru care perioada $T = 24$ h și rămîne în repaus relativ față de un punct de pe suprafața Pămîntului. Un astfel de satelit se numește *staționar* și este utilizat în retransmisii radio și T.V.

b) Raza orbitei sale considerată practic circulară are expresia:

$$R = R_p + h = \left(\frac{gT^2}{4\pi^2 R_p}\right)^{1/3} \cdot R_p \approx 6{,}61\, R_p.$$

c) Planul orbitei satelitului staționar poate fi planul ecuatorial, deoarece $R > R_p$.

5.3.9. $\frac{\gamma M_p m}{R_p^2} = \frac{mv_I^2}{R_p} \Rightarrow v_I = \sqrt{gR_p} = 7{,}9\,\frac{\text{km}}{\text{s}}$;

$$\frac{\gamma M_p m}{R_p} = \frac{mv_{II}^2}{2} \Rightarrow v_{II} = \sqrt{2gR_p} = 11{,}2\,\frac{\text{km}}{\text{s}}.$$

5.3.10. $v = v_I\left(\frac{R_p}{R}\right)^{1/2} = 7{,}11\,\frac{\text{km}}{\text{s}}$.

5.3.11. Viteza liniară a unui satelit pe orbita sa rezultă din relația: $\frac{\gamma mM}{R^2} = \frac{mv^2}{R}$, unde M este masa planetei și R distanța satelit-planetă. Din această relație rezultă: $v = \sqrt{\frac{\gamma M}{R}} \sim R^{-1/2}$. Pe de altă parte, viteza liniară a unui element dintr-un inel continuu se exprimă: $v = \omega R \sim R$ ($\omega = \text{const}$). Pe baza acestor considerații, se poate răspunde la întrebarea pusă.

5.3.12. *a*) $T = 3{,}06\,\pi\left(\frac{1{,}53\, R_{sp}}{a}\right)^{1/2} \approx 1{,}88$ ani pămîntești, unde $a = \frac{\gamma M_s}{R_{sp}^2}$ este accelerația Pămîntului spre Soare.

b) $\frac{\rho_m}{\rho_p} = \frac{M_m}{M_p}\left(\frac{R_p}{R_m}\right)^3 = 0{,}66.$

c) $g_m = \frac{\gamma M_m}{R_m^2} = 0{,}36\, g.$

d) $v_{II}^m = \sqrt{2g_m R_m} \approx 4{,}9\,\frac{\text{km}}{\text{s}}$.

5.3.13. După cum rezultă din figura 5.3.13R, asupra fiecărui corp acționează aceeași forță din partea celorlalte și anume:

$$F = \sqrt{F_1^2 + F_2^2 + 2F_1F_2\cos 60} = F_1\sqrt{3}$$

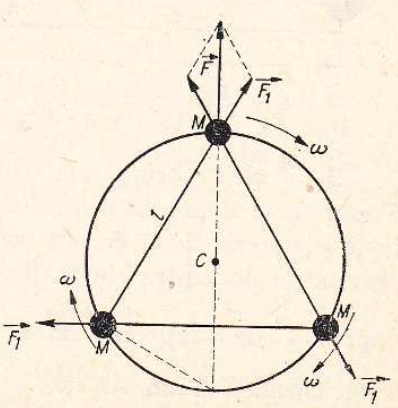


Fig. 5.3.13 R

și

$$F_1 = -\frac{\gamma M^2}{l^2}; \quad F = -\frac{\sqrt{3}\gamma M^2}{l^2}.$$

Datorită acestei forțe, fiecare corp se mișcă pe orbita circulară și deci

$$\frac{\sqrt{3}\gamma M^2}{l^2} = \frac{Mv^2}{R}; \quad R = \frac{l}{\sqrt{3}}; \quad v = \frac{\omega l}{\sqrt{3}},$$

de unde: $\omega = \sqrt{\frac{3\gamma M}{l^3}}$. Deoarece pentru satelitul staționar $\omega_1 = \sqrt{\frac{\gamma M_p}{(6{,}61R)^3}}$ și $\frac{\omega}{\omega_1} = \frac{T_1}{T}$ rezultă:

$$M = \frac{M_p}{3}\left(\frac{T_1}{T}\right)^2\left(\frac{l}{6{,}61R_p}\right)^3 \approx 1{,}8 \cdot 10^4 \text{ kg}.$$

5.3.14. Utilizînd notațiile din figura 5.3.14R se poate scrie:

$$\frac{\gamma M_s}{(R_{sp}-R_{lp})^2} = \frac{\gamma M_s}{R_{sp}^2}\left(1-\frac{R_{lp}}{R_{sp}}\right)^{-2} = \frac{\gamma M_s}{R_{sp}^2}\left(1+2\frac{R_{lp}}{R_{sp}}+\cdots\right).$$

Dar $\frac{\gamma M_s}{R_{sp}^2} = a_{sp}$ este accelerația Pămîntului spre Soare, iar $\frac{\gamma M_s}{(R_{sp}-R_{lp})^2} = a_{sl}$ este accelerația Lunii spre Soare și deci:

$$\frac{|a_{sp}-a_{sl}|}{a_{sp}} \cdot 100 \approx 2\frac{R_{pl}}{R_{sp}} \cdot 100 = 0{,}5\ \%.$$

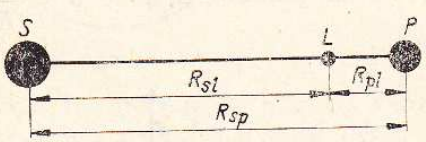


Fig. 5.3.14 R

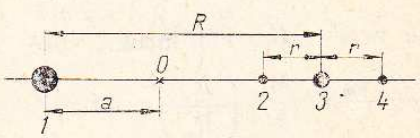


Fig. 5.3.15 R

5.3.15. *a*) În prima aproximație neglijăm prezența corpurilor 2 și 4. Presupunem atunci că centrul de masă al sistemului de corpuri 1 și 3 se află în O și că cele două corpuri se mișcă pe orbite închise datorită interacției gravitaționale dintre ele în jurul acestui centru (vezi fig. 5.3.15R). Viteza unghiulară de rotație este dată de relația (5.25) și anume: $\omega = \sqrt{\frac{\gamma(M_1+M_3)}{R^3}}$. Apoi considerăm un sistem de coordonate legat rigid de corpurile 1 și 3, care se rotește cu viteza unghiulară ω. În acest sistem de coordonate studiem

comportarea corpurilor 2 și 4. Legile de mișcare pentru aceste corpuri, astfel încît toate cele patru corpuri să rămînă pe aceeași direcție, se scriu sub forma:

$$M_2\left[-\frac{\gamma M_1}{(R-r)^2}+\omega^2(R-a-r)+\frac{\gamma M_3}{r^2}\right]+F_2=0,$$

$$M_4\left[-\frac{\gamma M_1}{(R+r)^2}+\omega^2(R-a+r)-\frac{\gamma M_3}{r^2}\right]+F_4=0.$$

Ținînd seama de expresia vitezei unghiulare ω rezultă:

$$F_2=\frac{\gamma M_1M_2}{(R-r)^2}-\frac{\gamma M_2M_3}{r^2}-\frac{\gamma M_2(M_1+M_3)}{R^3}(R-a-r),$$

$$F_4=\frac{\gamma M_1M_4}{(R+r)^2}+\frac{\gamma M_3M_4}{r^2}-\frac{\gamma M_4(M_1+M_3)}{R^3}(R-a+r).$$

Dar ținînd seama de relația: $M_1\omega^2a=\frac{\gamma M_1M_3}{R^2}=M_3\omega^2(R-a)$, forțele F_2 și F_4 se exprimă:

$$F_2=\gamma M_2\left[-\frac{M_3}{r^2}+\frac{M_1}{R^2}\left(1-\frac{r}{R}\right)^{-2}+\frac{M_3}{R^2}-\frac{M_1+M_3}{R^3}(R-r)\right],$$

$$F_4=\gamma M_4\left[\frac{M_3}{r^2}+\frac{M_1}{R^2}\left(1+\frac{r}{R}\right)^{-2}+\frac{M_3}{R^2}-\frac{M_1+M_3}{R^3}(R+r)\right].$$

Ținînd seama că $r\ll R$ și deci $\left(1-\frac{r}{R}\right)^{-2}\approx 1+2\frac{r}{R}$ și $\left(1+\frac{r}{R}\right)^{-2}\approx 1-2\frac{r}{R}$ se obține:

$$F_2=\gamma M_2\left[-\frac{M_3}{r^2}+\frac{r}{R^3}(3M_1+M_3)\right]=F'\left[1-\left(\frac{r}{R}\right)^3\left(3\frac{M_1}{M_3}+1\right)\right]=-10\text{ N},$$

$$F_4=\gamma M_4\left[\frac{M_3}{r^2}-\frac{r}{R^3}(3M_1+M_3)\right]=F''\left[1+\left(\frac{r}{R}\right)^3\left(3\frac{M_1}{M_3}+1\right)\right]=-20\text{ N},$$

unde: $F'=-\frac{\gamma M_2M_3}{r^2}$; $F''=+\frac{\gamma M_4M_3}{r^2}$.

b) Considerăm corpul *1* Soarele, corpul *3* Pămîntul, corpul *2* un corp de pe suprafața Pămîntului la miezul zilei și corpul *4* același corp la miezul nopții. Din soluția de sus rezultă că toate corpurile la miezul zilei și la miezul nopții cîntăresc mai puțin decît dimineața și seara. Notăm cu $G_{z,n}$ greutatea corpului ziua sau noaptea și avem:

$$G_{z,n}=G\left[1-3\left(\frac{M_s}{M_p}\right)\left(\frac{R_p}{R_{sp}}\right)^3\right];$$

$$\frac{G-G_{z,n}}{G}100=3\left(\frac{M_s}{M_p}\right)\left(\frac{R_p}{R_{sp}}\right)^3100\approx 7{,}6\cdot 10^{-6}\%.$$

c) Fie Luna corpul *1* și Pămîntul corpul *3*. În punctele *2* și *4* de pe suprafața Pămîntului apar ridicături în apa mărilor și anume:

$$G = G_0\left[1-\left(\frac{R_p}{R_{pl}}\right)^3\left(3\,\frac{M_l}{M_p}+1\right)\right],$$

unde G_0 este greutatea unui corp la suprafața Pămîntului.

$$\frac{G_0-G}{G_0}\,100 = \left(\frac{3M_l}{M_p}+1\right)\left(\frac{R_p}{R_{pl}}\right)^3\cdot 100 \approx 4{,}6\cdot 10^{-4}\,\%.$$

Deci din cauza atracției Lunii există puncte de pe suprafața Pămîntului în care apa mărilor (oceanelor) „cîntărește" mai puțin decît în toate celelalte puncte cu $4{,}6\cdot 10^{-4}\,\%$ și aceasta este cauza fluxului.

5.3.16. *a*) Combinînd legea atracției universale cu legea a II-a a dinamicii se găsește dependența accelerației gravitaționale de distanța de la centrul Pămîntului ca fiind de forma:

$$g_r = \begin{cases} g\left(\dfrac{R_p}{r}\right)^2, & \text{pentru } r \geqslant R_p, \\ g\left(\dfrac{r}{R_p}\right), & \text{pentru } r < R_p, \end{cases}$$

unde g este accelerația gravitațională la suprafața Pămîntului.

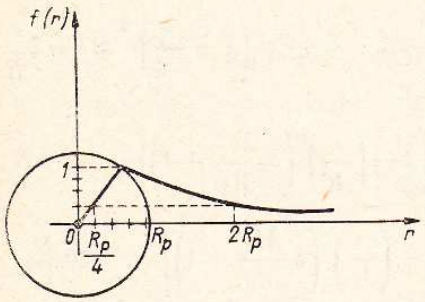


Fig. 5.3.16 R

Dependența $\frac{g_r}{g} = f(r)$ este dată în figura 5.3.16 R.

b) Intersectînd graficul obținut cu dreapta $\frac{g_r}{g} = \frac{1}{4}$ se constată că $r = 2R_p$ pentru $r > R_p$ și $r = \frac{R_p}{4}$ pentru $r < R_p$.

5.3.17. Ținînd seama de modul cum variază greutatea corpurilor cu altitudinea se poate scrie:

$$G_1 - G_2 = \frac{\gamma m M_p}{R_p^2}\left[\frac{1}{\left(1+\dfrac{h_1}{R_p}\right)^2} - \frac{1}{\left(1+\dfrac{h_2}{R_p}\right)^2}\right].$$

Dar cum $h_1 \ll R_p$ și $h_2 \ll R_p$ și deci $\left(1+\dfrac{h_1}{R_p}\right)^{-2} \approx 1-2\dfrac{h_1}{R_p}$, iar $\left(1+\dfrac{h_2}{R_p}\right)^{-2} \approx$ $\approx 1-2\dfrac{h_2}{R_p}$ rezultă:

$$G_1 - G_2 = \frac{2\gamma m M_p}{R_p^3}\,h.$$

Însă $M_p = \frac{4\pi R_p^3}{3}\rho$ și în final se obține: $\rho = \frac{3g_2}{8\pi\gamma h}\cdot\frac{g_1 - g_2}{g_2} = 5{,}5\times$ $\times 10^3 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$, unde am considerat că $g_2 = g$ este accelerația gravitațională la suprafața Pământului.

5.3.18. *a*) Utilizînd relațiile (5.29) și (5.30) obținute din figura 5.II și neglijînd turtirea Pământului se obține:

$$\frac{G - G_1}{G}\cdot 100 = \beta\cos^2\varphi\cdot 100 = 8{,}6\cdot 10^{-2}\%;\quad \beta = \frac{1}{289}.$$

b) Pe baza relației (5.31) rezultă:

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sin\varphi\cos\varphi}{\beta^{-1} - \cos^2\varphi} = 1{,}5\cdot 10^{-3}.$$

5.3.19. Luînd în seamă relația (5.32) avem:

$$G_{V,E} = G_0\left(1 \pm \frac{2\omega v}{g_0}\right),$$

unde $G_0 = G - m\omega^2 R_p \Rightarrow g_0 = g - \omega^2 R_p$ este greutatea unui corp în repaus la ecuator, iar $g = \frac{\gamma M_p}{R_p^2}$. Indicii V și E corespund semnelor $\pm$ din relație și care sînt în legătură cu mișcarea spre vest, respectiv, spre est de-a lungul ecuatorului. Pe baza primei relații se obține:

$$m = \frac{\Delta G}{4\omega v} = 25\,\text{kg};\quad \Delta G = G_V - G_E;$$

$$v = \frac{g_0}{2\omega}\cdot\frac{G_V - G_0}{G_0} = 9{,}78\,\frac{\text{m}}{\text{s}}.$$

5.3.20. *a*) Familia de traiectorii și notațiile utilizate sînt date în figura 5.3.20R. Printre traiectoriile familiei, una este circulară de rază r_0 și pentru aceasta sînt adevărate relațiile:

$$\frac{\mu v_0^2}{r_0} = \frac{\gamma m_1 m_2}{r_0^2};\quad E_0 = \frac{\mu v_0^2}{2} - \frac{\gamma m_1 m_2}{r_0},$$

de unde $E_0 = -\frac{1}{2}\mu v_0^2 = -\frac{\gamma m_1 m_2}{2r_0} = -1{,}44\cdot 10^{33}\,\text{J};\ v_0 = \left(\frac{2|E_0|}{\mu}\right)^{1/2} =$ $= 1{,}2\cdot 10^4\,\frac{\text{m}}{\text{s}}$.

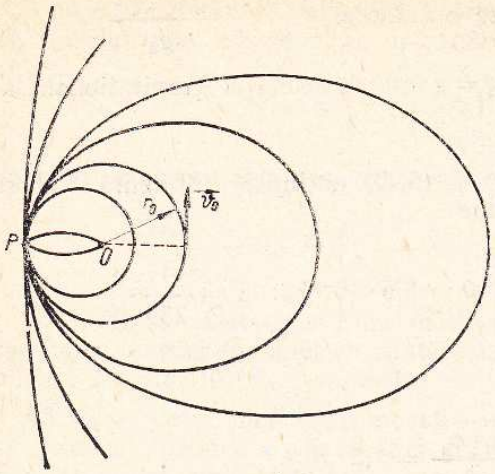


Fig. 5.3.20 R

b) Deoarece $\vec{v}_0 \perp \vec{r}_0$ avem: $|\vec{L}_0| = \mu|\vec{r}_0 \times \vec{v}_0| = \mu r_0 v_0 = 1{,}6 \times 10^{37} \times \frac{\text{kg} \cdot \text{m}^2}{\text{s}}$.

c) Energia totală în punctul P se exprimă:

$$E = \frac{\mu v_p^2}{2} - \frac{\gamma m_1 m_2}{r_0} = E_0 + \frac{1}{2}(\beta^2 - 1)\mu v_0^2; \quad \beta = \frac{v_p}{v_0}.$$

Ținînd seama că $E_0 = -\frac{1}{2}\mu v_0^2$ putem scrie:

$$E = |E_0|(\beta^2 - 2).$$

$E < 0 \Rightarrow \beta < \sqrt{2}$ orbită închisă (elipsă sau cerc);

$E = 0 \Rightarrow \beta = \sqrt{2}$ orbită deschisă (parabolă);

$E > 0 \Rightarrow \beta > \sqrt{2}$ orbită deschisă (hiperbolă).

d) $|\vec{L}| = |\vec{r}_0 \times \mu\vec{v}_p| = \mu r_0 v_p = \mu r_0 v_0 \beta = \beta|\vec{L}_0|$.

$\frac{|\vec{L}|}{|\vec{L}_0|} < \sqrt{2}$ (elipsă sau cerc); $\frac{|\vec{L}|}{|\vec{L}_0|} = \sqrt{2}$ (parabolă) și $\frac{|\vec{L}|}{|\vec{L}_0|} > \sqrt{2}$ (hiperbolă).

e) $E = |E_0|(\beta^2 - 2) = 6|E_0| = 8{,}64 \cdot 10^{33}$ J;

$$|\vec{L}| = \beta|\vec{L}_0| = 2\sqrt{2}\,|\vec{L}_0| = 4{,}512 \cdot 10^{37} \frac{\text{kg} \cdot \text{m}^2}{\text{s}}.$$

Ținînd seama de (5.23) și de faptul că $\mu v_0^2 r_0 = \gamma m_1 m_2$ rezultă: $E = |E_0|\frac{\varepsilon^2 - 1}{\beta^2}$. Dar cum $E = |E_0|(\beta^2 - 2)$, combinînd cele două relații, se obține pentru excentricitatea elipsei relația:

$$\varepsilon = |\beta^2 - 1| = 7.$$

5.3.21. Legea conservării energiei pentru cele două obiecte se exprimă:

$$\frac{m_1 v_0^2}{2} - m_1 g R_p = -m_1 g \frac{R_p^2}{R_1},$$

$$\frac{m_2 v_0^2}{2} - m_2 g R_p = \frac{m_2 v_2^2}{2} - m_2 g \frac{R_p^2}{R_2}.$$

Pentru al doilea obiect este adevărată și legea conservării momentului cinetic, $v_0 R_p = v_2 R_2$ și din cele trei relații rezultă:

$$\frac{R_1}{R_2} = \frac{2gR_p}{v_0^2} \Rightarrow v_0 = \left(\frac{2gR_p}{\frac{R_1}{R_2}} \right)^{1/2} = 8 \cdot 10^3 \text{ m/s}.$$

5.3.22. Legea conservării energiei și legea conservării momentului cinetic pentru cei doi sateliți se scriu:

$$\frac{m_1(v_0 + v_p)^2}{2} - m_1 g R_p = \frac{m_1 v_1^2}{2} - m_1 g \frac{R_p^2}{R_1}; \quad v_p = \omega R_p;$$

$$\frac{m_2(v_0 - v_p)^2}{2} - m_2 g R_p = \frac{m_2 v_2^2}{2} - m_2 g \frac{R_p^2}{R_2};$$

$$\left.\begin{aligned} v_0 R_p &= v_1 R_1 \\ v_0 R_p &= v_2 R_2 \end{aligned}\right\} \Rightarrow v_1 R_1 = v_2 R_2.$$

Combinînd aceste relații rezultă:

$$\frac{R_1}{R_2} = \frac{2gR_p - v_0^2\left(1 - \frac{v_p}{v_0}\right)^2}{2gR_p - v_0^2\left(1 + \frac{v_p}{v_0}\right)^2} = 1{,}008.$$

5.3.23.

$$h = \frac{v_0^2 R_p}{2gR_p - v_0^2};$$

$$v_0 = v_1 = \sqrt{gR_p} \Rightarrow h = \frac{v_1^2}{g} \approx 6{,}24 \cdot 10^6 \text{ m};$$

$$v_0 = v_{II} = \sqrt{2gR_p} \Rightarrow h = \infty.$$

5.3.24. Un obiect în repaus la suprafața Pământului are energia potențială gravitațională, $E_{p0} = -mgR_p$. Energia unui satelit pe o orbită la suprafața Pământului: $E_0 = E_c + E_p = -\frac{mgR_p}{2}$. Pentru ca să devină satelit trebuie să-i comunicăm energia:

$$\Delta E = E_0 - E_{p0} = \frac{mgR_p}{2} = 3{,}2 \cdot 10^{11} \text{ J}.$$

La înălțimea h, satelitul va avea energia $E = -\frac{mgR_p}{2}\frac{1}{1+\frac{h}{R_p}}$ și deci trebuie să-i comunicăm la suprafața Pământului energia

$$\Delta E_h = -\frac{mgR_p}{2}\left(\frac{1}{1+\frac{h}{R_p}} - 2\right) = 4 \cdot 10^{11} \text{ J}.$$

5.3.25. *a*) Deoarece energia totală a unui satelit este $E = -\frac{\gamma m M_p}{r}$, atunci pentru cei doi sateliți rezultă:

$$E_1 = -\frac{\gamma m M_p}{r} = -mgR_p\frac{1}{1+\frac{h}{R_p}} = -\frac{mgR_p}{2} = -3{,}2 \cdot 10^{10} \text{ J}.$$

b) După ciocnire, $E_c = 0$ și deci:

$$E_2 = -\frac{2mM_p}{r} = -2mgR_p\frac{1}{1+\frac{h}{R_p}} = -mgR_p = -6{,}4 \cdot 10^{10} \text{ J}.$$

c) $\Delta E = E_1 - E_2 = mgR_p\frac{1}{1+\frac{h}{R_p}} = \frac{mgR_p}{2} = 3{,}2 \cdot 10^{10}$ J.

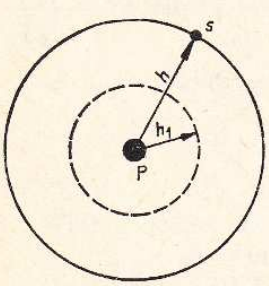


Fig. 5.3.26 R

d) După ciocnire, masele sateliților se unesc formînd un corp care se oprește din mers și care deci va cădea spre Pământ.

5.3.26. *a*) Notațiile necesare pot fi urmărite pe figura 5.3.26R și deci:

$$v = \sqrt{\frac{\gamma M_p}{R_p + h}} = \sqrt{\frac{\gamma M_p}{3R_p}} = \frac{v_I}{\sqrt{3}};$$

$$T = 2\pi\frac{R_p + h}{v} = 6\sqrt{3}\pi\frac{R_p}{v_I};$$

$$v_1 = \sqrt{\frac{\gamma M_p}{R_p + h_1}} = \sqrt{\frac{\gamma M_p}{2R_p}} = \frac{v_I}{\sqrt{2}}; \quad T_1 = 2\pi\frac{R_p + h_1}{v_1} = 4\sqrt{2}\pi\frac{R_p}{v_I}.$$

b) $$E = -\frac{\gamma m M_p}{2(R_p + h)}; \quad E_1 = -\frac{\gamma m M_p}{2(R_p + h_1)};$$

$$E - E_1 = \frac{\gamma m M_p}{2}\left(\frac{1}{R_p + h_1} - \frac{1}{R_p + h}\right).$$

Dacă notăm cu N numărul orbitelor parcurse pînă în starea finală, atunci $E - E_1 = N\Delta E$ și deci:

$$N = \frac{\gamma m M_p}{2\Delta E}\left(\frac{1}{2R_p} - \frac{1}{3R_p}\right) = \frac{\gamma m M_p}{12 R_p \Delta E} = 3{,}95 \cdot 10^3 \text{ rot.}$$

c) $L = E - E_1$; $L = \bar{F}(h - h_1)$;

de unde $\bar{F} = \frac{N\Delta E}{h - h_1} = \frac{N\Delta E}{R_p} = 4{,}875 \cdot 10^2$ N.

d) Considerînd satelitul ca punct material cu momentul de inerție $I = mr^2$, conservarea momentului cinetic se exprimă:

$$|\vec{L}_1| = |\vec{L}_2| \Rightarrow I_1\omega_1 = I_2\omega_2 \Rightarrow v(R_p + h) = v_1(R_p + h_1) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (R_p + h)\sqrt{\frac{\gamma M_p}{R_p + h}} = (R_p + h_1)\sqrt{\frac{\gamma M_p}{R_p + h_1}} \Rightarrow h = h_1,$$

de unde rezultă că în acest proces nu se conservă momentul cinetic.

5.3.27. *a*) Cele două stele efectuează mișcarea de rotație în jurul centrului de masă C al sistemului ca în figura 5.3.27R și ținînd seama de relația (5.25) rezultă:

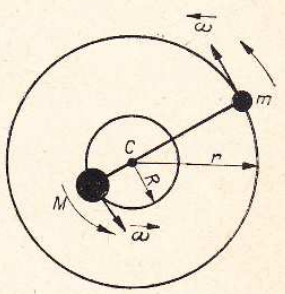


Fig. 5.3.27 R

$$\omega = \frac{1}{d}\sqrt{\frac{3m\gamma}{d}};$$

$$T = 2\pi d\sqrt{\frac{d}{3\gamma m}} = 1{,}4 \cdot 10^7 \text{ s.}$$

b) $\frac{|\vec{L}_m|}{|\vec{L}_M|} = \frac{I_1\omega}{I_2\omega} = \frac{mr^2}{MR^2} = \frac{M}{m} = 2;$

$$\frac{E_c^m}{E_c^M} = \frac{\frac{1}{2}I_1\omega^2}{\frac{1}{2}I_2\omega^2} = \frac{I_1}{I_2} = 2.$$

5.4. Principiul echivalenței

5.4.1. Pot exista două posibilități și anume:

a) dacă nu există frecare cu aerul, atunci aparatele din proiectil vor simți gravitația cînd proiectilul se deplasează în dispozitivul de lansare;

b) dacă există frecare cu aerul, proiectilul capătă o accelerație negativă suplimentară, iar aparatele de bord simt „gravitația" îndreptată în direcția opusă accelerației primite, adică în direcția mișcării proiectilului ($a_r = g + a_t$, unde a_t este accelerația de transport).

5.4.2. În cazul mișcării relative în cîmp gravitațional, legea de mișcare se exprimă:

$$ma_r = G + F;\ F = -ma_t,$$

unde a_r este accelerația relativă în sistemul neinerțial față de Pământ, iar a_t este accelerația de transport a acestuia față de Pământ.

a) Căderea liberă: $a_t = g \Rightarrow a_r = 0 \Rightarrow$ imponderabilitate și, în acest caz, balanța nu indică nimic.

b) Asupra cabinei acționează $F > G$: $a_r = g - a_t < 0$ și, în acest caz, totul „cade" spre plafon. Balanța indică o greutate mai mică decît pe Pământ în repaus.

c) Asupra cabinei acționează $F < G$: $a_r = g + a_t > 0$ și corpurile cad spre podea. Balanța indică o greutate mai mare decît pe Pământ.

d) O masă se măsoară astfel: cu ajutorul resortului se imprimă corpului o accelerație relativă la proiectil. Făcînd raportul dintre forța (citită pe dinamometru) și accelerație, se află masa.

5.4.3. $ma_r = mg - mg + ma \Rightarrow a_r = a$.

Capitolul 6

MECANICA FLUIDELOR

6.1.

$$\frac{V'}{V} = \frac{\frac{1}{4}\rho_{Hg} - \rho_a}{\rho_{Hg} - \rho_a}.$$

Numeric:

$$\frac{V'}{V} = 0{,}19.$$

6.2.

$$x = \frac{\rho_{Fe} - \rho_a}{\rho_{Hg} - \rho_a}.$$

6.3.

$$r = R\left(\frac{\rho_a - \rho}{\rho_a}\right)^{1/3}.$$

Numeric:

$$r = 5{,}85 \text{ cm}.$$

6.4.

$$\rho = \rho_0(1 - k^2).$$

6.5.

$$\nu_1 = \frac{\eta P_1}{F_2 l_0} \cdot \frac{S_2}{S_1}.$$

Numeric:

$$\nu_1 = 0{,}12 \text{ s}^{-1}.$$

6.6.

$$L_1 = \frac{1}{\eta} 10F\left(\frac{d_2}{d_1}\right)^2 l_2.$$

Numeric:

$$L_1 = 5 \cdot 10^5 \text{ J}.$$

6.7.

$$p(h) = \rho g h;$$

$$dF = \rho g h l \, dh, F = \frac{1}{2}\rho g l^3;$$

$$Fh_0 = \int_0^l dM,$$

$$dM = (l - h)\rho g h l \, dh,$$

$$Fh_0 = \int_0^l (l - h)\rho g h l \, dh;$$

$$h_0 = \frac{l}{3}.$$

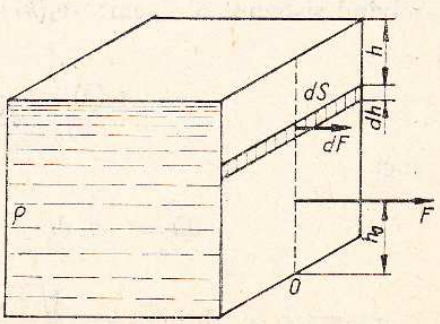


Fig. 6.7 R

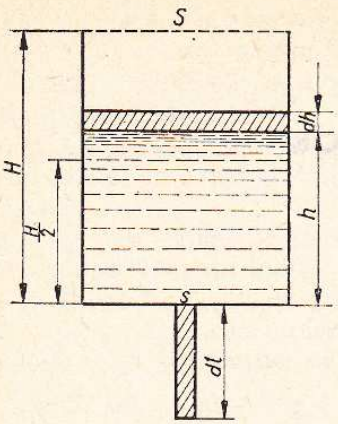


Fig. 9.6 R

6.8. $F = \pi\rho g R h^2$.

6.9. $dV = -S\,dh$, $dV = sv(h)\,dt$;

$$v(h) = \sqrt{2gh}, \quad -S\,dh = s\sqrt{2gh}\,dt,$$

$$dt = -\frac{S}{s}\frac{dh}{\sqrt{2gh}};$$

$$t_1 = -\frac{S}{s\sqrt{2g}}\int_H^{H/2}\frac{dh}{\sqrt{h}},$$

$$t_1 = \frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}}\frac{S}{s}\sqrt{\frac{2H}{g}};$$

$$t_2 = -\frac{S}{s\sqrt{2g}}\int_{H/2}^{0}\frac{dh}{\sqrt{h}} = \frac{S}{s}\sqrt{\frac{H}{g}};$$

$$\frac{t_1}{t_2} = \sqrt{2} - 1.$$

6.10. *a)* $v = \frac{s}{S}\sqrt{2gh} = 6{,}2\frac{\text{mm}}{s}$, $(s \ll S)$.

b) $t_1 = \frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}}\frac{S}{s}\sqrt{\frac{2h}{g}} = 65{,}2$ s.

c) $t = \frac{S}{s}\sqrt{\frac{2h}{g}} = 226{,}8$ s.

6.11. Notînd cu v_1 viteza de coborîre a nivelului și cu v_2 viteza de ieșire prin orificiu, putem scrie:

$$\frac{\rho v_1^2}{2} + \rho g h = \frac{\rho v_2^2}{2},$$

$$S \cdot v_1 = s \cdot v_2.$$

Rezolvînd sistemul obținem: $v_1(h) = \frac{s}{\sqrt{S^2 - s^2}}\sqrt{2gh}$,

$$v_2(h) = \frac{S}{\sqrt{S^2 - s^2}}\sqrt{2gh}.$$

Atunci

$$dh = -v_1\,dt = -\frac{s}{\sqrt{S^2 - s^2}}\sqrt{2gh}\,dt.$$

Prin integrare se obține: $t_1 = \sqrt{\frac{2h_0}{g}}\frac{\sqrt{S^2 - s^2}}{s}$.

Pe de altă parte, $t_2 = \sqrt{\frac{h_0}{2g}} \frac{\sqrt{S^2 - s^2}}{s}$, deci $t_1 = 2t_2$.

6.12. $$h = \frac{D^2}{2gs^2}.$$

Numeric: $h = 46$ cm.

6.13. $$s_3 = \sqrt{2} \cdot s_1.$$

6.14. Ecuațiile celor două traiectorii sînt:

$$y_1 = h_1 + \frac{gx_1^2}{2v_{01}^2}, \quad y_2 = h_2 + \frac{gx_2^2}{2v_{02}^2},$$

unde

$$v_{01} = \sqrt{2gh_1}, \quad v_{02} = \sqrt{2gh_2}.$$

Înlocuind mai sus obținem:

$$y_1 = h_1 + \frac{x_1^2}{4h_1}, \quad y_2 = h_2 + \frac{x_2^2}{4h_2}.$$

Punînd condiția de intersecție a celor două parabole, se obțin coordonatele X, Y ale punctului de intersecție:

$$X = 2\sqrt{h_1 h_2}, \quad Y = h_1 + h_2.$$

6.15. $$h_1 = \frac{h - a}{2}.$$

6.16. $$D_V = S_1 S_2 \sqrt{\frac{2g\Delta h}{S_2^2 - S_1^2}}.$$

6.17. $$\Delta h = \frac{\rho_{aer} D_V^2}{2g\rho_{apă} S_B^2} \left[1 - \left(\frac{S_B}{S_A}\right)^2\right].$$

Numeric: $\Delta h = 7$ cm.

6.18. $$t = \frac{lS}{s}\sqrt{\frac{\rho S}{2F}}.$$

Numeric: $t = 0{,}53$ s.

6.19. $$S_1 = \frac{D_V S_0}{\sqrt{D_V^2 - 2gh S_0^2}}.$$

Numeric: $S_1 = 4{,}4$ cm^2.

6.20. $$v = \sqrt{2g(h_2 - h_1)}.$$

6.21. $$t = 2\sqrt{\frac{2h_1}{g}} \frac{\rho_2}{\rho_2 - \rho_1}.$$

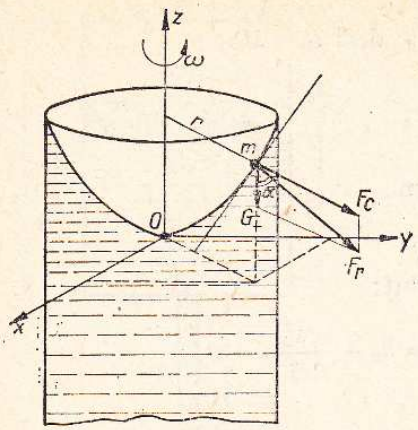


Fig. 6.22 R

6.22. Particula de masă m este în echilibru pe suprafața lichidului dacă forța rezultantă F_r este perpendiculară pe tangenta suprafeței:

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{F_c}{G} = \frac{dz}{dr};$$

$$F_c = m\omega^2 r,\ G = mg;$$

$$\frac{dz}{dr} = \frac{\omega^2 r}{g},\quad z = \frac{\omega^2}{2g} r^2,$$

$z = \frac{\omega^2}{2g}(x^2 + y^2)$ — paraboloid de revoluție.

$$p = \rho g(h + z),$$

$$p = \rho g h + \frac{\rho}{2}\omega^2(x^2 + y^2).$$

În rezolvare s-a neglijat coborîrea pe verticală a punctului O prin trecerea de la repaus la mișcarea de rotație.

6.23. Condițiile de echilibru pentru cele două stări sînt:

$$mg = \rho_0 V g + kx,\ mg = \rho' V g + k(x - \Delta l),$$

unde $k = \frac{F_1}{x_1}$ este constanta elastică a resortului, x deformația, $V = \frac{m}{\rho}$ volumul corpului, iar ρ' densitatea finală a aerului. Rezolvînd sistemul obținem:

$$\rho' = \rho_0 + \frac{\Delta l \rho F_1}{mgx_1}.$$

Temperatura fiind constantă, din legea generală a gazelor rezultă:

$$p' = p_0 \frac{\rho'}{\rho_0},$$

$$p' = p_0\left(1 + \frac{\Delta l \rho F_1}{mgx_1\rho_0}\right).$$

Numeric: $p = 155$ atm.

6.24. $$v_{max} = \sqrt{2\left(g + \frac{4\pi^2 A}{T^2}\right)h} = 2{,}17\ \frac{\text{m}}{s},$$

$$v_{min} = \sqrt{2\left(g - \frac{4\pi^2 A}{T^2}\right)h} = 1{,}77\ \frac{\text{m}}{\text{s}}.$$

6.25. $$L = gh_0\left(m + \frac{1}{2}\rho S h_0\right).$$

6.26. Numărul lui Reynolds $\text{Re} = \frac{vD}{\nu} = 1\,800$, curgerea este deci laminară.

Pentru viteza critică $\frac{v_c D}{\nu} = 2\,400$, se obține $v_c = 0{,}16\ \frac{\text{m}}{\text{s}}$.

6.27. $$d = \frac{4D_m}{\pi \mathrm{Re} \eta}.$$

Numeric: $d = 9{,}6$ cm.

6.28. $$F_\eta = 3\pi\eta v d \text{ (Stokes)};$$

$$mg = F_A + F_\eta,\ \rho_{Pb}\frac{\pi d^3}{6}g = \rho_{gl}\frac{\pi d^3}{6}g + 3\pi\eta v d;$$

$$v = \frac{d^2 g}{18\eta}(\rho_{Pb} - \rho_{gl}),\ v' = \frac{d'^2 g}{18\eta}(\rho_{Pb} - \rho_{gl});$$

$$t = \frac{h}{v},\ t' = \frac{h}{v'};$$

$$\Delta t = t' - t = \frac{18\eta h}{g(\rho_{Pb} - \rho_{gl})}\left(\frac{1}{d'^2} - \frac{1}{d^2}\right).$$

Numeric: $t = 2{,}4$ s.

6.29. În regim laminar, forța de rezistență (Stokes) este:

$$F = 3\pi\eta v d.$$

Condiția de cădere cu viteza limită se scrie:

$$mg = 3\pi\eta v d + \rho V g,$$

de unde

$$v = \frac{d^2 g}{18\eta}(\rho_a - \rho) = 32\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}.$$

În regim turbulent, forța de rezistență este:

$$F = KS\frac{\rho v^2}{2}.$$

Condiția de cădere cu viteza limită se scrie analog:

$$mg = KS\frac{\rho v^2}{2} + \rho V g,$$

de unde

$$v = \sqrt{\frac{4gd}{3K}\frac{\rho_a - \rho}{\rho}} = 6{,}5\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}.$$

6.30. Aplicăm legea lui Poiseuille pentru volumul lichidului:

$$V = \frac{\pi r^4 \Delta p t}{8 l \eta},\ \text{unde}\ \Delta p = \rho g h.$$

$$V = \pi r^2 v_1 t, \quad v_1 = \frac{r^2 g h \rho}{8 l \eta};$$

$$Sv = S_1 v_1, \quad v = v_1 \frac{r^2}{R^2};$$

$$v = \frac{r^4 \rho g}{8 R^2 l \eta} h = 7{,}6 \cdot 10^{-2} \frac{\text{m}}{\text{s}}.$$

6.31. După legea lui Poiseuille:

$$V = \frac{\pi r^4 \Delta p}{8 l \eta} t, \text{ unde } \Delta p = \rho g (h - h_1);$$

$$V = \pi r^2 v t;$$

$$v = \frac{r^2 \rho g (h - h_1)}{8 \eta l}.$$

Din ecuațiile de mișcare $d = vt$, $h_1 = \frac{gt^2}{2}$ se obține:

$$d = \frac{r^2 \rho g (h - h_1)}{8 \eta l} \sqrt{\frac{2h_1}{g}}.$$

Numeric: $d = 37$ cm.

6.32. $r = \sqrt{\frac{9 \eta_0 c}{2g(\rho - \rho_0)}} = 0{,}46$ mm.

6.33. $t = \frac{128 l \eta V}{\pi d^4 \rho g h} = 270$ s.

6.34. $h = \frac{8 l \eta R^2}{r^4 \rho g} v = 1{,}3$ m.

6.35. $v = c \sqrt{\operatorname{tg} \alpha}$.

6.36. Scriem ecuațiile de mișcare pentru $v < c$ și $v = c$:

$$mg - Kv^2 = m \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}, \quad mg = Kc^2,$$

din care rezultă $\frac{K}{m} = \frac{g}{c^2}$, $\mathrm{d}t = \frac{c^2}{g} \frac{\mathrm{d}v}{c^2 - v^2}$.

Ținînd seama de condițiile inițiale $t = 0$, $v = 0$, obținem prin integrare:

$$t = \frac{c}{2g} \ln \frac{c + v}{c - v}.$$

Pentru viteză se obține expresia $v = c \operatorname{th} \frac{gt}{c}$, unde $\operatorname{th} x = \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}}$.

Pentru spațiu: $\mathrm{d}S = v(t)\, \mathrm{d}t$,

$$\mathrm{d}S = \frac{c^2}{g} \frac{v\, \mathrm{d}v}{c^2 - v^2}.$$

Efectuînd integrarea cu condițiile inițiale $t = 0$, $S = 0$, obținem:

$$S = \frac{c^2}{2g} \ln \frac{c^2}{c^2 - v^2},$$

relația din care se vede că viteza limită c poate fi atinsă după parcurgerea unui spațiu $S \to \infty$.

6.37. Ecuațiile de mișcare pentru $v < c$ și $v = c$ se scriu:

$$mg + Kv^2 = -m\frac{dv}{dt}, \quad mg = Kc^2;$$

$$-dt = \frac{dv}{g\left(1 + \frac{v^2}{c^2}\right)}.$$

Efectuînd integrarea cu condițiile inițiale $t = 0$, $v = 0$ obținem:

$$t_u = \frac{c}{g} \operatorname{arc\,tg} \frac{v_0}{c}.$$

Pentru înălțime, din ecuațiile $dh = v\,dt = -\frac{v\,dv}{g\left(1 + \frac{v^2}{c^2}\right)}$ se obține:

$$h_m = \frac{c^2}{2g} \ln\left(1 + \frac{v_0^2}{c^2}\right).$$

Pentru timpul de coborîre t_c și viteza de revenire v_m se obțin expresiile:

$$t_c = \frac{c}{g} \ln\left(\frac{v_0}{c} + \sqrt{1 + \frac{v_0^2}{c^2}}\right),$$

$$v_m = \frac{v_0 c}{\sqrt{v_0^2 + c^2}}.$$

6.38.

$$T = 2{,}303\,\frac{2c}{g} = 2{,}303 \text{ s}.$$

6.39. Din ecuațiile de mișcare $mg - Kv = m\frac{dv}{dt}$ și $mg = Kc$, rezultă prin integrare cu condițiile inițiale $t = 0$, $v = 0$ și $S = 0$, următoarele expresii pentru viteză și spațiu ca funcții de timp:

$$v = c(1 - e^{-\frac{gt}{c}}), \quad S = ct + \frac{c^2}{g}(e^{-\frac{gt}{c}} - 1).$$

6.40. Fie ρ_0 densitatea lichidului. Ecuația de mișcare după legea a II-a a dinamicii se scrie:

$$ma = mg - F_A - F_\eta, \text{ unde } F_\eta = 6\pi\eta r v \text{ (Stokes)}.$$

Se obține:

$$dt = \frac{dv}{\left(1 - \frac{\rho}{\rho_0}\right)g - \frac{9}{2}\frac{\eta \cdot v}{\rho_0 r^2}}.$$

Prin integrare cu condițiile inițiale $v = 0$ la $t = 0$, se obține:

$$v(t) = \frac{2r^2}{9}(\rho_0 - \rho)\, g\left(1 - e^{-\frac{9\eta}{2\rho_0 r^2}t}\right).$$

Din această relație se vede că viteza limită (maximă) se atinge pentru $t \to \infty$, cînd ar avea expresia:

$$v_{lim} = \frac{2r^2}{9\eta}(\rho_0 - \rho)\, g;$$

pentru situația din textul problemei, $v_{lim} - v = \frac{1}{100} v_{lim}$, rezultă:

$$t = \frac{4 \ln 10}{9}\frac{\rho_0 r^2}{\eta}.$$

6.41. Din ecuația legii a II-a, $m\frac{dv}{dt} = F - K\eta v$, rezultă prin integrare cu condițiile inițiale $t = 0$, $v = v_0$, pentru v, expresia:

$$v(t) = \frac{F}{K\eta} + \left(v_0 - \frac{F}{K\eta}\right)e^{-\frac{K\eta}{m}t}.$$

Pentru $v_0 = 0$, rezultă: $v(t) = \frac{F}{K\eta}\left(1 - e^{-\frac{K\eta}{m}t}\right)$

Exponențiala descrește cu timpul și pentru un timp la care $e^{-\frac{K\eta}{m}t} \ll 1$, viteza devine practic constantă și egală cu cea limită:

$$v_{lim} = \frac{F}{K\eta}.$$

6.42. Fie sistemul de coordonate ca în figura 6.42 R. Ecuațiile celor două traiectorii sînt:

$$y = -\frac{d}{2} + \frac{gx^2}{2v_A^2}, \quad y = \frac{d}{2} + \frac{gx^2}{2v_B^2},$$

unde

$$v_A = \sqrt{2g\left(h - \frac{d}{2}\right)}, \quad v_B = \sqrt{2g\left(h + \frac{d}{2}\right)}.$$

Ecuațiile traiectoriilor devin:

$$y = -\frac{d}{2} + \frac{x^2}{4\left(h - \frac{d}{2}\right)}, \quad y = \frac{d}{2} + \frac{x^2}{4\left(h + \frac{d}{2}\right)}.$$

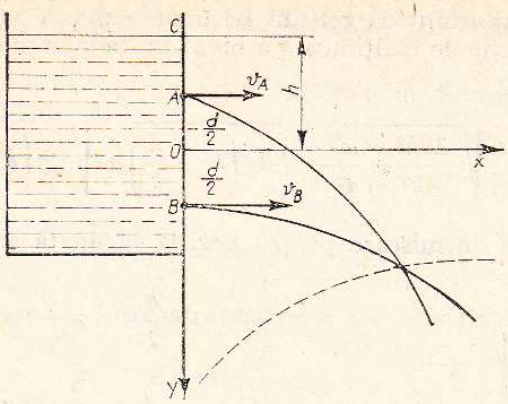


Fig. 6.42 R

Eliminînd parametrul h între cele două ecuații se obține ecuația locului geometric al punctului de intersecție sub forma:

$$\frac{y^2}{\left(\frac{d}{2}\right)^2} - \frac{x^2}{d^2} = 1,$$

care reprezintă o hiperbolă.

6.43. Coordonatele punctului de intersecție se obțin sub forma:

$$x = \sqrt{4h^2 - d^2},\ y = h.$$

Înălțimea h depinde de timp și se poate scrie:

$$S\frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}t} = s\sqrt{2g\left(h - \frac{d}{2}\right)} + s\sqrt{2g\left(h + \frac{d}{2}\right)},$$

unde S este secțiunea vasului, iar s cea a orificiilor. Separînd variabilele rezultă:

$$\frac{S}{sd\sqrt{2g}}\left(\sqrt{h + \frac{d}{2}}\,\mathrm{d}h - \sqrt{h - \frac{d}{2}}\,\mathrm{d}h\right) = \mathrm{d}t,$$

iar prin integrare

$$\frac{2}{3}\frac{S}{sd\sqrt{2g}}\left(\sqrt{\left(h + \frac{d}{2}\right)^3} - \sqrt{\left(h - \frac{d}{2}\right)^3}\right) = t + \text{const.}$$

Calculul vitezei totale a punctului de intersecție:

$$v = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2};$$

$$\dot{x} = \frac{4h\dot{h}}{\sqrt{4h^2 - d^2}},\quad \dot{y} = \dot{h},\quad v = \dot{h}\sqrt{\frac{20h^2 - d^2}{4h^2 - d^2}};$$

$$\dot{h} = \frac{1}{\frac{S}{sd\sqrt{2g}}\left(\sqrt{h + \frac{d}{2}} - \sqrt{h - \frac{d}{2}}\right)}.$$

După unele transformări rezultă în final expresia vitezei punctului de intersecție ca funcție de înălțimea h a nivelului lichidului din vas, sub forma următoare:

$$v(h) = \frac{s}{S}\sqrt{\frac{20h^2 - d^2}{4h^2 - d^2}}\left[\sqrt{2g\left(h + \frac{d}{2}\right)} + \sqrt{2g\left(h - \frac{d}{2}\right)}\right].$$

6.44. Ecuațiile de mișcare pentru poziția înclinată sînt:

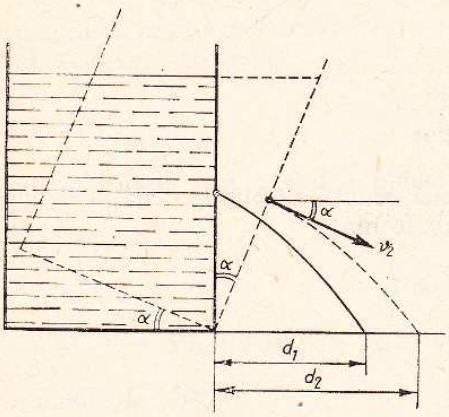


Fig. 6.44 R

$$\frac{h}{2}\cos\alpha = v_2 t \sin\alpha + \frac{gt^2}{2},$$

$$d_2 - \frac{h}{2}\sin\alpha = v_2 t \cos\alpha,$$

unde

$$v_2 = \sqrt{gh\cos\alpha}.$$

Pentru t rezultă expresia:

$$t = \sqrt{\frac{h\cos\alpha}{g}}\left(-\sin\alpha + \sqrt{1 + \sin^2\alpha}\right).$$

Pentru d_2 se obține:

$$d_2 = h\left[\frac{1}{2}\sin\alpha + \cos^2\alpha\left(-\sin\alpha + \sqrt{1 + \sin^2\alpha}\right)\right].$$

Scriind ecuațiile de mișcare pentru poziția verticală,

$$d_1 = v_1 t, \quad \frac{h}{2} = \frac{g}{2}t^2,$$

se obține:

$$h = d_1;$$

deci

$$d_2 = d_1\left[\frac{1}{2}\sin\alpha + \cos^2\alpha\left(\sqrt{1 + \sin^2\alpha} - \sin\alpha\right)\right].$$

6.45. Vasul cu lichid fiind în mișcare accelerată, asupra feței considerate vor acționa:

forța de presiune hidrostatică, $F_1 = \frac{1}{2}\rho g l^3$ (vezi problema 6.7),

forța inerțială, $F_2 = \rho a l^3$.

Forța F_1 acționează la înălțimea $H_1 = \frac{l}{3}$ față de baza vasului, iar forța F_2 în centrul feței considerate a vasului.

Forța rezultantă $F = \rho l^3\left(\frac{g}{2} + a\right)$ acționează în punctul de aplicație situat la distanța $H = \frac{3a + g}{3(2a + g)} l$ față de baza vasului. Se vede că dacă $a = 0$, $H = H_1 = \frac{l}{3}$.

6.46. $$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{2g}}.$$

6.47. Forța de frecare între straturile de aer este dată de relația

$$\mathrm{d}F = \eta \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}z}\,\mathrm{d}S,$$

de unde $$f = \frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}S} = \eta \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}z}.$$

Admițînd o variație liniară a vitezei cu distanța se poate scrie:

$$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}z} = \frac{v}{d};$$

prin urmare $$f = \eta \frac{v}{d}$$

și $$v = \frac{fd}{\eta} = 100\ \frac{\mathrm{m}}{s}.$$

6.48. Forța aplicată cilindrului interior echilibrează forța de frecare internă, care în aproximația cazului plan se scrie:

$$F = \eta \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}r} S,$$

unde $$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}r} = \frac{2\pi\nu d_2}{d_2 - d_1},\quad S = \pi d_1 \cdot h.$$

Din aceste relații rezultă pentru η expresia:

$$\eta = \frac{F(d_2 - d_1)}{2\pi^2 \nu h d_1 d_2} = 1{,}8 \cdot 10^{-5}\ \frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{m} \cdot \mathrm{s}}.$$

6.49. Considerăm un domeniu inelar de rază r și lățime $\mathrm{d}r$. Forța de frecare corespunzătoare se scrie:

$$\mathrm{d}F = \eta \frac{\omega r}{h} 2\pi r\,\mathrm{d}r.$$

Această forță creează momentul

$$\mathrm{d}M = \frac{2\pi\eta\omega}{h} r^3\,\mathrm{d}r.$$

Prin integrare se obține momentul total:

$$M = \frac{1}{32} \frac{\pi \eta_l \omega}{h} d^4.$$

Pe de altă parte, momentul M creează o torsiune de unghi α a firului de suspensie

$$M = f\alpha = \frac{1}{32} \frac{\pi \eta_l \omega}{h} d^4,$$

de unde

$$\alpha = \frac{1}{32} \frac{\pi \eta_l \omega}{fh} d^4, \quad \alpha = 1{,}4 \text{ rad} = 81°.$$

6.50. Pentru determinarea coeficientului de viscozitate η_1 se folosește legea lui Poiseuille:

$$D = \frac{\pi r^4 \Delta p}{8 \eta_1 l},$$

unde l este lungimea tubului capilar, r raza sa, Δp diferența de presiune la capetele tubului.

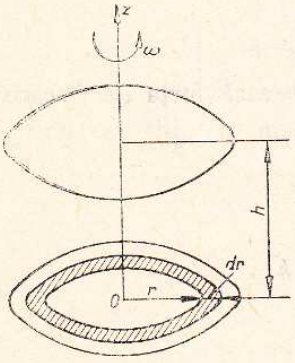


Fig. 6.49 R

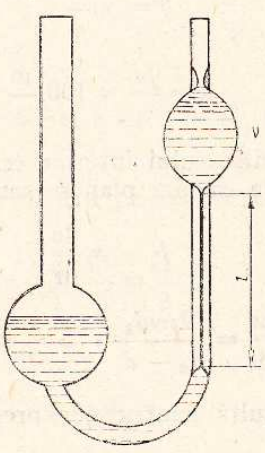


Fig. 6.50 R

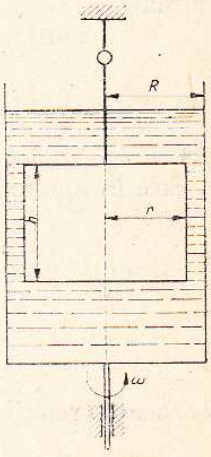


Fig. 6.51 R

Pentru două volume egale de lichid se scriu relațiile:

$$V_0 = D_0 t_0 = \frac{\pi r^4 \Delta p_0 t_0}{8 \eta_0 l},$$

$$V_1 = D_1 t_1 = \frac{\pi r^4 \Delta p_1 t_1}{8 \eta_1 l},$$

$$\eta_1 = \eta_0 \frac{t_1 \Delta p_1}{t_0 \Delta p_0}.$$

Dacă lichidele curg sub acțiunea greutăților, atunci

$$\frac{\Delta p_1}{\Delta p_0} = \frac{\rho_1}{\rho_0};$$

deci

$$\eta_1 = \eta_0 \frac{t_1 \rho_1}{t_0 \rho_0}.$$

6.51. Gradientul vitezei pe distanța dintre cilindri este:

$$\frac{dv}{dr} = \frac{\omega R}{R - r}.$$

Forța de frecare care determină răsucirea cilindrului interior și a firului se scrie:

$$F = \eta \frac{dv}{dr} S = \eta \frac{\omega R}{R - r} 2\pi r h,$$

iar momentul său $M = Fr = f\varphi$, de unde

$$\eta = \frac{f\varphi(R - r)}{2\pi r^2 h \omega R}.$$

Sol. valabilă dacă fluidul se mișcă într-un singur strat!

Capitolul 7

OSCILAȚII ȘI UNDE

7.1. Mișcarea oscilatorie armonică

7.1.1 *a)* $x_1 = A \sin(\omega t_1 + \alpha)$, (1) $x_2 = A \sin(\omega t_2 + \alpha)$, (3)

$v_1 = A\omega \cos(\omega t_1 + \alpha)$, (2) $v_2 = A\omega \cos(\omega t_2 + \alpha)$. (4)

Ridicînd la pătrat relațiile (1) și (2) și adunîndu-le, asemănător pentru relațiile (3) și (4), rezultă:

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi \sqrt{\frac{x_1^2 - x_2^2}{v_2^2 - v_1^2}} = 7{,}025 \text{ s}; \quad A = \sqrt{\frac{x_1^2 v_2^2 - x_2^2 v_1^2}{v_2^2 - v_1^2}} = 6{,}87 \text{ cm}.$$

b) $a_{max} = A\omega^2 = 4{,}40$ cm/s^2.

7.1.2. *a)* $a = -A\omega^2 \sin(\omega t + \alpha) = \frac{\sqrt{3}}{2} A\omega^2$,

$$\omega t + \alpha = \frac{\pi}{6} t + \frac{\pi}{3} = k\pi + (-1)^{k+1} \cdot \frac{\pi}{3}.$$

Rezultă: $t = 2\,[3k - 1 + (-1)^{k+1}]$. $(k = 1, 2, \ldots)$

b) $F_{max} = mA\omega^2 = 0{,}274 \cdot 10^{-3}$ N.

c) $E_c = \frac{mv^2}{2} = \frac{mA^2\omega^2}{2} \cos^2(\omega t + \alpha) = 6{,}85 \cos^2(\omega t + \alpha) \cdot 10^{-6}$ J;

$$E_p = \frac{mA^2\omega^2}{2} \sin^2(\omega t + \alpha) = 6{,}85 \sin^2(\omega t + \alpha) \cdot 10^{-6} \text{ J}.$$

d) $\frac{E_c}{E_p} = 1$; rezultă $\omega t + \alpha = k\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{4}$, $t = 3k - \frac{1}{2}$ (s) $(k = 1, 2, \ldots)$;

Pentru $x = \frac{A}{2}$, $\frac{E_c}{E_p} = 3$.

7.1.3. *a)* $x = A \sin(\omega t + \varphi_0) = 4 \sin\left(4\pi t + \frac{\pi}{6}\right)$ cm.

b) $\omega t + \varphi_0 = k\pi + (-1)^k \arcsin \frac{\sqrt{2}}{2}$;

rezultă: $t = \frac{12k + 3 \cdot (-1)^k - 2}{48}$ s,

$$v = A\omega \cos(\omega t + \varphi_0) = (-1)^k 8\sqrt{2}\pi \text{ cm/s}.$$

7.1.4. Condiția de rezonanță se scrie: $T = \frac{l}{v} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{2k}}$.

Rezultă: $k = 2\pi^2 \frac{mv^2}{l^2} = 400$ N/m.

7.1.5. $\rho_c = \frac{\rho_a g T^2}{4\pi^2 h} = 0{,}913$ g/cm³.

7.1.6. Notînd cu S secțiunea transversală (constantă) a tubului (fig. 7.1.6 R), din condiția de incompresibilitate a lichidului rezultă:

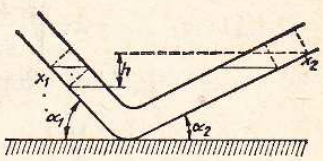


Fig. 7.1.6 R

$$V_1 = V_2 \text{ sau } x_1 = x_2,$$

iar diferența de nivel h este:

$$h = x_1 \sin\alpha_1 + x_2 \sin\alpha_2 = x(\sin\alpha_1 + \sin\alpha_2).$$

Legea a doua a dinamicii se scrie:

$$-\rho g S x(\sin\alpha_1 + \sin\alpha_2) = m\ddot{x} = \rho l S \ddot{x},$$

de unde

$$\ddot{x} + \frac{g}{l}(\sin\alpha_1 + \sin\alpha_2) = 0 \text{ și } T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g(\sin\alpha_1 + \sin\alpha_2)}}.$$

Pentru un tub cu ramurile verticale: $\sin\alpha_1 = \sin\alpha_2 = 1$ și $T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{2g}}$.

7.1.7. Perioadele de oscilație în cele trei etape ale mișcării sînt:

$$T_1 = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g+a}},\quad T_2 = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}},\quad T_3 = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g-a}}.$$

Numărul total de oscilații este:

$$n = \frac{t_1}{T_1} + \frac{t_2}{T_2} + \frac{t_1}{T_3} = \frac{8}{0{,}855} + \frac{17{,}48}{0{,}897} + \frac{8}{0{,}946} = 40 \text{ osc.}$$

7.1.8. Pendulul matematic își modifică perioada de oscilație de la

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}} \text{ la } T' = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g \pm a}}.$$

Pendulul elastic nu-și modifică perioada de oscilație.

7.1.9. Din conservarea impulsului rezultă (figura 7.1.9 R): $\frac{l_1}{l} = \frac{m_2}{m_1 + m_2}$.

Deoarece $\Delta l \sim l$ și $k \sim \frac{1}{l}$, $\frac{k}{k_1} = \frac{l_1}{l} = \frac{m_2}{m_1 + m_2}$.

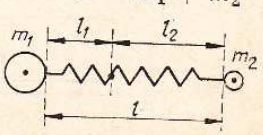


Fig. 7.1.9 R

Rezultă: $T_1 = T_2 = 2\pi\sqrt{\frac{m_1 m_2}{k(m_1 + m_2)}} = 2{,}29$ s.

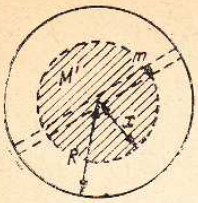


Fig. 7.1.10 R

7.1.10. $\alpha = \dfrac{1}{\Delta\theta}\left(\dfrac{l}{l_0} - 1\right)$; $\dfrac{l}{l_0} = \dfrac{T^2}{T_0^2}$;

$$\alpha = \frac{1}{\Delta\theta}\left(\frac{T^2}{T_0^2} - 1\right) \simeq 1{,}8 \cdot 10^{-5}\ \text{grd}^{-1}.$$

7.1.11. *a)* $T = 2\pi\sqrt{\dfrac{l}{g_h}} \simeq 2\pi\sqrt{\dfrac{l}{g_0}\left(1 + \dfrac{h}{R}\right)} = T_0\left(1 + \dfrac{h}{R}\right) = 1{,}000031\ \text{s}.$

b) g_1 fiind cîmpul gravitațional dat de sfera de rază $R_1 = R - h$,

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g_1}} = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g_0}\cdot\frac{R}{R-h}} \simeq T_0\left(1 + \frac{h}{2R}\right) = 1{,}000016\ \text{s}.$$

7.1.12. Problema este echivalentă cu oscilația unui pendul matematic de lungime $l/2$ și masă m, aflat în cîmpul gravitațional al unei mase sferice M la distanța r de centrul sferei.

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l/2}{g_M}} = 2\pi\sqrt{\frac{l}{2kM}}\,r = 19{,}5 \cdot 10^3\ \text{s}.$$

7.1.13. Pentru ca firul să fie întins trebuie ca resortul să fie întins, deci în punctul cel mai înalt al oscilației, la limită, resortul nu mai este alungit (pentru $x = x_{max}$) (fig. 7.1.13 R). Legea conservării energiei, scrisă între pozițiile cea mai de sus și cea mai de jos a oscilației, este:

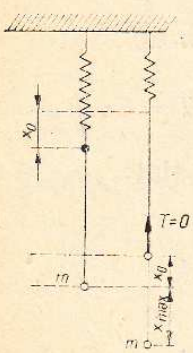


Fig. 7.1.13 R

$$mg(x_{max} + x_0) = \frac{k(x_{max} + x_0)^2}{2}.$$

Cum la echilibru, $mg = kx_0$, rezultă: $x_{max} = \dfrac{mg}{k}$.

7.1.14. Legea a doua a dinamicii se scrie pentru sistemul din figura 7.1.14 R:

$$mg - N = ma = m\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}.$$

Rezultă: $N = m(g + a) = m(g + A\omega^2\cos\omega t)$.

Corpul se desprinde de scîndură, dacă $A > \dfrac{g}{\omega^2}$.

7.1.15. Legea a doua a dinamicii se scrie pentru sistemul din figura 7.1.15 R:

$$\begin{cases} kx - F_r = m_1a_1, \\ F_r = m_2a_2. \end{cases}$$

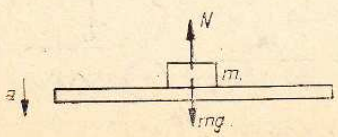


Fig. 7.1.14 R

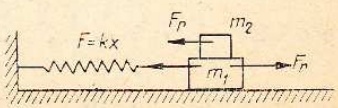


Fig. 7.1.15 R

Pentru ca cele două corpuri să se miște împreună trebuie ca $a_1 = a_2$. Dar a_1 are valoarea maximă cînd $v_1 = 0$, deci $x = A$. Rezultă:

$$kA = (m_1 + m_2)\, a_{max}.$$

Din legea conservării energiei, $\frac{(m_1 + m_2)\, v_0^2}{2} = \frac{kA^2}{2}$, rezultă:

$$A = v_0 \sqrt{\frac{m_1 + m_2}{k}} = 63{,}25 \text{ cm}.$$

Forța minimă de frecare pentru ca m_2 să nu alunece de pe m_1 va fi:

$$F_{r_{min}} = \mu_{min} m_2 g = m_2 a_{max} = m_2 \frac{k}{m_1 + m_2} \cdot v_0 \sqrt{\frac{m_1 + m_2}{k}}$$

și

$$\mu_{min} = \frac{v_0}{g} \sqrt{\frac{k}{m_1 + m_2}} = 0{,}644.$$

7.1.16. Din legea conservării energiei aplicată sistemului din figura 7.1.16 R:

$$E_{c_{max}} = E_{p_{max}},\quad E_{p_{max}} = \frac{k}{2} x_{max}^2,$$

$$E_c = E_{c_m} + E_{c_{m_1}} = \frac{m\dot{x}^2}{2} + \frac{1}{2}\int_0^l \rho\, da \left(\frac{a}{l}\dot{x}\right)^2.$$

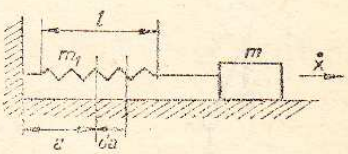


Fig. 7.1.16 R

Deoarece viteza punctelor resortului crește linear cu depărtarea de capătul fix, de la zero la $\dot{x}$ (viteza masei m), la o distanță a de capătul fix, viteza este $\frac{a}{l}\dot{x}$. Se obține:

$$E_c = \frac{\dot{x}^2}{2}\left(m + \frac{m_1}{3}\right).$$

Cum $\dot{x}_{max} = \omega x_{max}$, $E_{c_{max}} = \frac{\omega^2 x_{max}^2}{2}\left(m + \frac{m_1}{3}\right)$. Rezultă: $T = 2\pi \sqrt{\frac{m + \frac{m_1}{3}}{k}}$.

7.1.17. *a)* $\frac{1}{k} = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{k_i}$.

b) $k = \sum_{i=1}^{n} k_i$.

7.1.18. *a)* $T = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}}$.

b) $T = \pi \sqrt{\frac{m}{k}}$.

7.1.19. Legea a doua a dinamicii se scrie pentru sistemul din figura 7.1.19 R:

$$-mgl \sin \theta - m_1 g(l/2) \sin \theta = \left(ml^2 + \frac{m_1 l^2}{3}\right)\ddot{\theta};$$

pentru θ mic, $\sin \theta \simeq \theta$ și obținem:

$$\ddot{\theta} + \frac{\left(m + \frac{m_1}{2}\right)g}{\left(m + \frac{m_1}{3}\right)l}\theta = 0.$$

Rezultă: $T = 2\pi \sqrt{\frac{\left(m + \frac{m_1}{3}\right)}{\left(m + \frac{m_1}{2}\right)} \cdot \frac{l}{g}} = 1{,}96$ s.

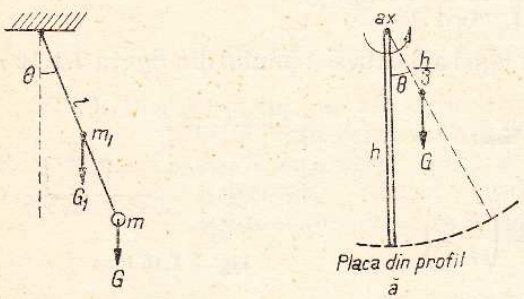


Fig. 7.1.19 R

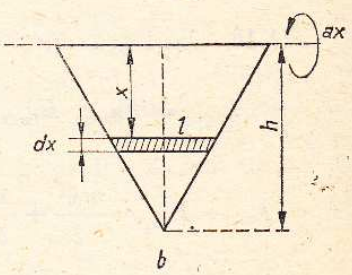


Fig. 7.1.21 R

7.1.20. În absența corpului suplimentar: $\omega_1 = \sqrt{\frac{3g}{2l}}$.

Atașînd un corp punctual de masă M, $\omega_2 = \sqrt{\frac{3g(2Mx + ml)}{2(3Mx^2 + ml^2)}}$, unde m este masa barei, l — lungimea sa, x — distanța de la capătul fix al barei la masa M. Punînd condiția $\omega_1 = \omega_2$, rezultă $x = \frac{2l}{3}$. Acest loc se numește *centrul de oscilație* al barei.

7.1.21. Legea a doua a dinamicii se scrie (fig. 7.1.21R, *a*):

$$-mg\frac{h}{3}\sin\theta = I\ddot{\theta},$$

unde momentul de inerție I al triunghiului este (fig. 7.1.21R, *b*):

$$I = \int_0^h x^2\,dm = \sigma\int_0^h lx^2\,dx = \frac{\sigma h^4}{6\sqrt{3}} = \frac{mh^2}{6}.$$

Rezultă: $T = 2\pi\sqrt{\frac{h}{2g}}$.

7.1.22. Pentru placă: $T_1 = 2\pi\sqrt{\frac{5l}{6g}}$.

Pentru cadru: $T_2 = 2\pi\sqrt{\frac{7l}{6g}}$.

Deci $\frac{T_1}{T_2} = \sqrt{\frac{5}{7}}$.

7.1.23. Pentru inel: *a)* $T_a = 2\pi\sqrt{\frac{3r}{2g}}$;

b) $T_b = 2\pi\sqrt{\frac{2r}{g}}$; $\frac{T_a}{T_b} = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

Pentru disc: *a)* $T_a = 2\pi\sqrt{\frac{5r}{4g}}$;

b) $T_b = 2\pi\sqrt{\frac{3r}{2g}}$; $\frac{T_a}{T_b} = \sqrt{\frac{5}{6}}$.

7.1.24. Legea a doua a dinamicii se scrie (fig. 7.1.24 R, *a*):

$$-mga \cdot \sin\theta = I\ddot{\theta}$$

unde a este distanța de la centrul discului la centrul de masă, iar I — momentul de inerție al discului față de centru.

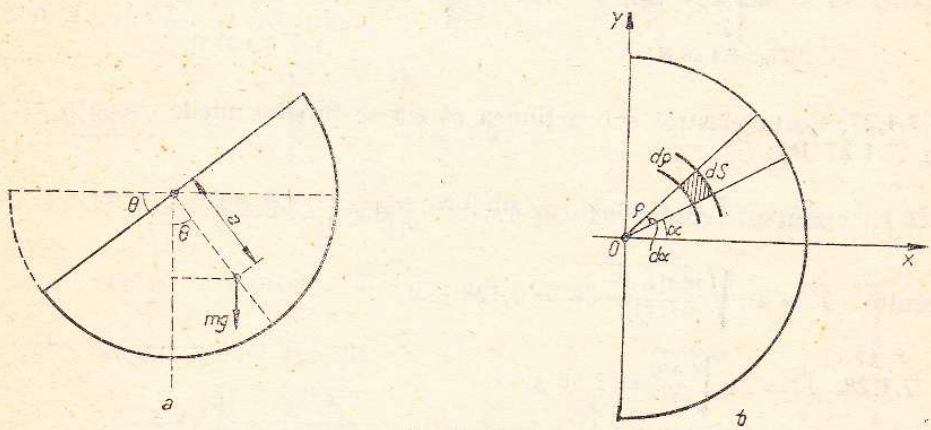


Fig. 7.1.24 R

Poziția centrului de masă este (fig. 7.1.24 R, *b*):

$$a = \frac{\iint x\,dm}{\iint dm} = \frac{\iint x\,dS}{\frac{\pi r^2}{2}} = \frac{\int_0^r \rho^2 d\rho \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos\alpha\,d\alpha}{\frac{\pi r^2}{2}} \Rightarrow \frac{4r}{3\pi}.$$

Rezultă:

$$T = \pi\sqrt{\frac{3\pi r}{2g}} = 0{,}688 \text{ s}.$$

7.1.25. Legea a doua a dinamicii se scrie pentru tijă (fig. 7.1.25 R):

$$-F_1 \sin \varphi_1 \cdot x - F_2 \sin \varphi_2 (l - x) = I\ddot{\theta} = \frac{2}{5} mr^2,$$

în care

$$F_1 = \frac{l - x}{l} G, \; F_2 = \frac{x}{l} G \text{ și } \delta_1 = L\varphi_1 = x\theta, \; \delta_2 = L\varphi_2 = (l - x)\,\theta.$$

Rezultă:

$$\ddot{\theta} + \frac{5}{2} \cdot \frac{x(l - x)\, g}{Lr^2} \theta = 0 \text{ și } T = 2\pi r \sqrt{\frac{2}{5} \cdot \frac{L}{x(l - x)\, g}}.$$

7.1.26. $T = \pi \sqrt{\dfrac{L}{g}} = 1{,}003$ s.

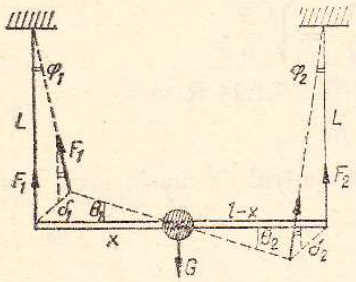


Fig. 7.1.25 R

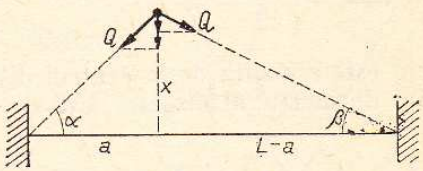


Fig. 7.1.27 R

7.1.27. Forța elastică sub acțiunea căreia se produc micile oscilații este (fig. 7.1.27 R):

$$F = Q \sin \alpha + Q \sin \beta \simeq \frac{QL}{a(L - a)} x = kx.$$

Rezultă: $T = 2\pi \sqrt{\dfrac{ma(L - a)}{QL}} = 0{,}128$ s.

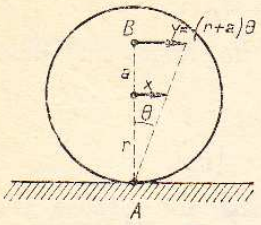
7.1.28. $T = 2\pi \sqrt{\dfrac{3m}{2k}} = 2{,}56$ s.

7.1.29. $T = \pi \sqrt{\dfrac{3m}{2k}} = 1{,}05$ s.

7.1.30. Deoarece cilindrul se rostogolește fără alunecare, deplasarea centrului său este $x = r\theta$, iar a punctului B, de prindere a resorturilor (deci, variația lungimii resorturilor), este $(r + a)\,\theta$ (fig. 7.1.30 R). Legea a doua a dinamicii se scrie:

$$-2k(r + a)^2\, \theta = I_A \ddot{\theta} = \frac{3mr^2}{2} \ddot{\theta}.$$

Rezultă: $T = \dfrac{\pi r}{r + a} \sqrt{\dfrac{3m}{k}} = 1{,}23$ s.



Fig, 7.1.30 R

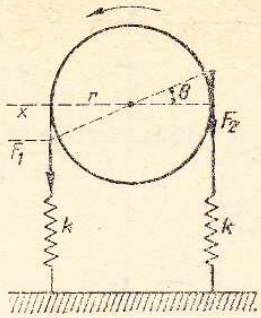


Fig. 7.1.31 R

7.1.31. Să presupunem că la echilibru, ambele resorturi sînt întinse cu x_0 (fig. 7.1.31 R). Legea a doua a dinamicii se scrie pentru disc:

$$(F_1 - F_2)\, r = [k(x_0 - x) - k(x_0 + x)]\, r = -2kxr = I\ddot{\theta}.$$

Cum $x = r\theta$ și $I = \dfrac{mr^2}{2}$, obținem ecuația de mișcare:

$$\ddot{\theta} + \frac{4k}{m}\theta = 0 \text{ și } T = \pi\sqrt{\frac{m}{k}} = 1{,}15 \text{ s.}$$

Se vede că perioada de oscilație nu depinde de raza discului și de comprimarea inițială a resorturilor.

7.1.32. $T = 2\pi\dfrac{R}{r}\sqrt{\dfrac{m + \dfrac{M}{2}}{k}} = 3{,}97$ s.

7.1.33. Legea a doua a dinamicii se scrie pentru sistemul din figura 7.1.33 R:

$$-k_1\theta - 2kL^2 \sin\theta = \frac{mL^2}{3}\ddot{\theta}.$$

Pentru unghiuri mici rezultă:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{mL^2}{3k_1 + 6kL^2}}.$$

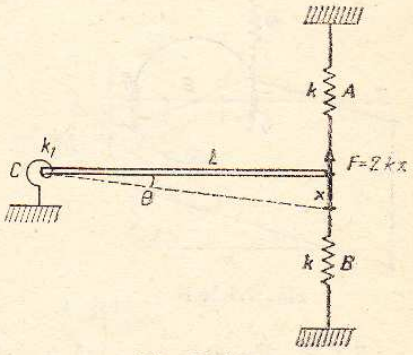


Fig. 7.1.33 R

7.1.34. La o deplasare x a masei m din poziția de echilibru (fig. 7.1.34 R), scripetele A coboară cu x_1, iar B cu x_2. Firul fiind inextensibil,

$$x = 2x_1 + 2x_2.$$

Scripeții avînd masa neglijabilă, tensiunea F de-a lungul firului este aceeași, deci

$$F_1 = F_2 = 2F.$$

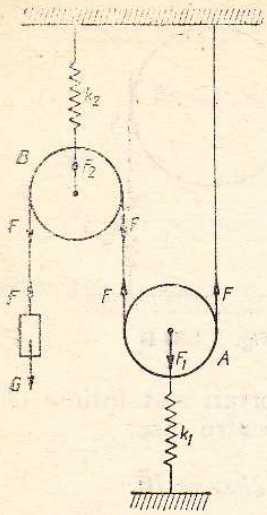


Fig. 7.1.34 R

Cum $F_1 = k_1 x_1$ și $F_2 = k_2 x_2$, rezultă:

$$F = \frac{k_1 k_2}{4(k_1 + k_2)} x.$$

Sistemul este echivalent cu un resort cu constanta elastică

$$k = \frac{k_1 k_2}{4(k_1 + k_2)}.$$

Rezultă: $T = 2\pi \sqrt{\dfrac{4m(k_1 + k_2)}{k_1 k_2}} = 1{,}62$ s.

7.1.35. $T = 2\pi \sqrt{\dfrac{9m}{k}} = 1{,}33$ s.

7.1.36. La o deformare $x = r\theta$ a resortului *1* corespunde o deformare $4x$ a resortului *2* (fig. 7.1.36 R). Aplicînd legea conservării energiei:

$$E_{p\,max} = E_{c\,max},$$

în care

$$E_{p\,max} = \frac{k_1}{2} x_{max}^2 + \frac{k_2}{2} 16 x_{max}^2 = \frac{(k_1 + 16k_2) r^2 \theta_{max}^2}{2}$$

și

$$E_{c\,max} = \frac{1}{2} I_0 \dot{\theta}_{max}^2 = \frac{mr^2}{2} \dot{\theta}_{max}^2.$$

Rezultă:

$$2(k_1 + 16k_2) = m\omega^2 \text{ și } T = 2\pi \sqrt{\frac{m}{2(k_1 + 16k_2)}} = 0{,}34 \text{ s.}$$

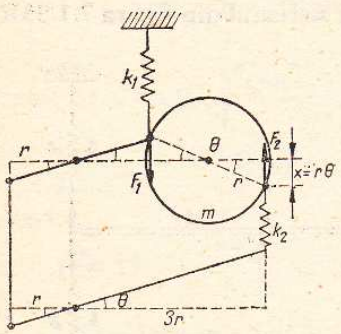


Fig. 7.1.36 R

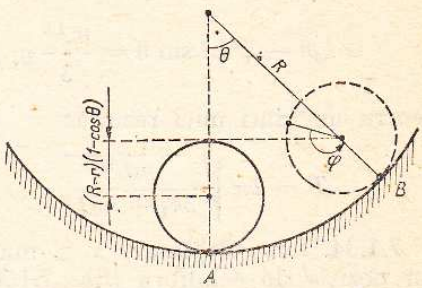


Fig. 7.1.37 R

7.1.37. Energia cinetică a sistemului este (fig. 7.1.37 R):

$$E_c = \frac{mv^2}{2} + \frac{I\omega^2}{2} = \frac{m}{2}[(R-r)\dot{\theta}]^2 + \frac{mr^2}{4}\left[\frac{(R-r)}{r}\dot{\theta}\right]^2$$

$$[\widehat{AB} = r\varphi \simeq (R-r)\theta \text{ și } \omega = \dot{\varphi}]$$

iar energia potențială față de poziția de echilibru:

$$E_p = mg(R - r)(1 - \cos\theta).$$

Energia sistemului fiind constantă în timpul mișcării rezultă:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(E_c + E_p) = 0.$$

Rezultă ecuația diferențială:

$$\ddot{\theta} + \frac{2g}{3(R-r)}\theta = 0 \text{ și } T = 2\pi\sqrt{\frac{3(R-r)}{2g}} = 2{,}33 \text{ s.}$$

Pentru sferă se obține: $T = 2\pi\sqrt{\frac{7(R-r)}{5g}} = 2{,}25$ s.

7.1.38. Deoarece corpul se balansează fără alunecare, punctul A de contact este centru instantaneu de rotație (fig. 7.1.38 R, *a*). Să calculăm poziția centrului de masă al suprafeței semicilindrice față de centrul suprafeței (fig. 7.1.38 R, *b*):

$$a = \frac{\int \rho x\,\mathrm{d}l}{\int \rho\,\mathrm{d}l} = \frac{\int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} r\cos\alpha \cdot r\,\mathrm{d}\alpha}{\pi r} = \frac{2r}{\pi}.$$

Aplicăm legea conservării energiei:

$$E_{p\max} = E_{c\max},$$

unde

$$E_{p\max} = mga(1 - \cos\theta_{max}) = mg\frac{2r}{\pi}\cdot\frac{\theta_{max}^2}{2}$$

și

$$E_{c\max} = I_A\frac{\dot{\theta}_{max}^2}{2} = mr(r-a)\omega^2\theta_{max}^2.$$

Obținem:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{r(\pi-2)}{g}} = 0{,}678 \text{ s.}$$

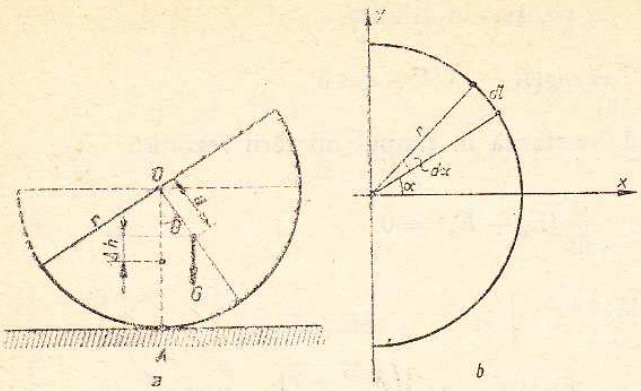


Fig. 7.1.38 R

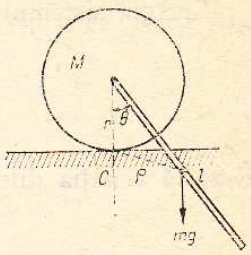


Fig. 7.1.39 R

7.1.39. Legea a doua a dinamicii se scrie pentru sistemul din figura 7.1.39 R:

$$-mg\frac{l}{2}\sin\theta = I_C\ddot{\theta} \tag{1}$$

punctul C fiind centrul instantaneu de rotație.

Momentul de inerție I_C al sistemului față de punctul C este:

$$I_C = \frac{3Mr^2}{2} + \frac{ml^2}{12} + m\rho^2. \tag{2}$$

Dar $\rho^2 = \frac{l^2}{4} + r^2 - 2r\frac{l}{2}\cos\theta \simeq \left(\frac{l}{2} - r\right)^2$.

Înlocuind ρ^2 în (2) și I_C în (1) obținem ecuația de mișcare: $\ddot{\theta} + \frac{mgl}{2I_C}\theta = 0$

și

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{2I_C}{mgl}}.$$

7.1.40. *a)* $T = 2\pi\sqrt{\dfrac{l}{\sqrt{g^2 + a^2}}}$.

b) $T = 2\pi\sqrt{\dfrac{l}{\sqrt{g^2 + a^2 + 2ga\sin\alpha}}}$.

c) $T = 2\pi\sqrt{\dfrac{l}{\sqrt{g^2 + \dfrac{v^2}{R}}}}$.

7.1.41. *a)* Manșonul se va deplasa treptat, pe măsura creșterii accelerației, pînă la valoarea maximă $\frac{ma}{2k} = 0{,}1$ m.

b) Manșonul va efectua oscilații armonice; elongația calculată față de poziția inițială a manșonului este:

$$x = \frac{ma}{2k}\left(1 - \cos\sqrt{\frac{2k}{m}}\,t\right) = 0{,}1\ (1 - \cos 3{,}16\ t)\ \text{m}.$$

7.1.42. La echilibru (fig. 7.1.42 R), $mg = kx_0$. Notînd cu y_0 poziția cea mai de jos a platanului, cînd viteza sistemului este zero, legea conservării energiei se scrie:

$$mg(h + y_0) = \frac{ky_0^2}{2} = \frac{mg}{2x_0}\,y_0^2.$$

Rezolvînd ecuația în y_0 obținem:

$$y_0 = x_0 + \sqrt{x_0^2 + 2x_0h} = x_0\left(1 + \sqrt{1 + \frac{2h}{x_0}}\right)$$

soluția cu — nu are sens, deoarece $y_0 > x_0$).

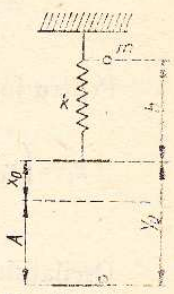


Fig. 7.1.42 R

Sistemul va executa o mișcare oscilatorie armonică în jurul poziției de echilibru:

$$y = A\cos(\omega t + \alpha),$$

în care

$$A = y_0 - x_0 = x_0\sqrt{1 + \frac{2h}{x_0}} = 24{,}68\ \text{cm}$$

și

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{g}{x_0}} = 18{,}08\ \text{rad/s}.$$

Unghiul α se determină din condiția inițială:

$$\text{la } t = 0,\ y = x_0 = x_0\sqrt{1 + \frac{2h}{x_0}}\cdot\cos\alpha,$$

$$\text{deci } \alpha = \arccos\frac{1}{\sqrt{1 + \frac{2h}{x_0}}} = 1{,}45\ \text{rad}.$$

Rezultă $y = 24{,}68\cos(18{,}08t + 1{,}45)$ cm.

7.1.43. Pentru ca blocul deplasat cu x_0 din poziția de echilibru să poată amorsa oscilațiile trebuie ca $x_0 > \frac{\mu mg}{2k} = 9{,}8$ cm.

Mișcarea este amortizată, cu pulsația constantă $\omega = \sqrt{\frac{2k}{m}}$ (frecarea constantă nu modifică pulsația oscilației neamortizate). La fiecare jumătate de oscilație, amplitudinea scade cu $\frac{\mu mg}{2k}$ (fig. 7.1.43 R):

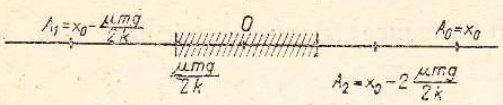


Fig. 7.1.43 R

$$A_0 = x_0; \quad A_1 = x_0 - \frac{\mu mg}{2k}; \quad \cdots A_n = x_0 - n\frac{\mu mg}{2k}.$$

Pentru jumătatea de oscilație de ordin l:

$$x_l = \left(x_0 - l\frac{\mu mg}{2k}\right)\cos \omega t + \frac{\mu mg}{2k} = (30 - 9{,}8l)\cos 3{,}16t - 9{,}8 \text{ cm}.$$

Oscilațiile au loc atît timp cît $A_n > \frac{\mu mg}{2k}$. Numărul de jumătăți de oscilații va fi:

$$n < \frac{2kx_0}{\mu mg} - 1 = 2{,}20; \quad \text{deci } n = 2.$$

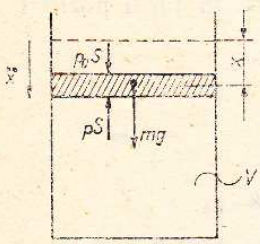


Fig. 7.1.44 R

7.1.44. *a*) Legea a doua a dinamicii se scrie pentru piston (fig. 7.1.44 R):

$$mg + p_0S - pS = m\ddot{x}.$$

Comprimarea aerului închis sub piston fiind adiabatică:

$$p_0V_0^\gamma = pV^\gamma, \tag{2}$$

iar

$$V = V_0 - Sx, \tag{3}$$

x fiind deplasarea din poziția inițială. Înlocuind pe V din (3) în (2) și apoi pe p din (2) în (1), obținem ecuația diferențială:

$$mg - p_0S\left[\left(\frac{V_0}{V_0 - Sx}\right)^\gamma - 1\right] = m\ddot{x}. \tag{4}$$

Pentru deplasări mici, $\frac{Sx}{V_0} \ll 1$, astfel că putem scrie:

$$\left(\frac{V_0}{V_0 - Sx}\right)^\gamma = \left(\frac{1}{1 - \frac{Sx}{V_0}}\right)^\gamma \simeq 1 + \gamma\frac{Sx}{V_0}$$

și obținem ecuația unei mișcări oscilatorii armonice:

$$mg - \frac{\gamma p_0 S^2}{V_0} x = m\ddot{x},$$

cu soluția

$$x = \frac{mgV_0}{\gamma p_0 S^2}\left(1 - \cos S\sqrt{\frac{\gamma p_0}{mV_0}}\, t\right) = 0{,}54\ (1 - \cos 42{,}6t)\ \text{cm}$$

și perioada $T = \frac{2\pi}{S}\sqrt{\frac{mV_0}{\gamma p_0}} = 0{,}15$ s.

b) Pentru hidrogen, mișcarea nu se modifică (gaz biatomic). Pentru heliu, $\gamma = \frac{5}{3}$ (gaz monoatomic); perioada și amplitudinea mișcării cresc.

7.2. Compunerea oscilațiilor armonice

7.2.1. $x = 5{,}88 \cdot 10^{-2} \sin\left(\frac{2\pi}{3} t + 0{,}96\right)$ m.

7.2.2. $x = A\ (\sin 2\pi\nu_1 t \cdot \cos 2\pi\nu_3 t + \sin 2\pi\nu_2 t \cdot \cos 2\pi\nu_3 t) = \frac{A}{2}[\sin 2\pi(\nu_1 + \nu_3)t + \sin 2\pi(\nu_1 - \nu_3)t + \sin 2\pi(\nu_2 + \nu_3)t + \sin 2\pi(\nu_2 - \nu_3)t] = \sin 2\pi t + \sin 4\pi t + \sin 6\pi t + \sin 8\pi t$ cm.

7.2.3. *a*) $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$, elipsă cu semiaxele 3 și 2.

b) $x^2 + y^2 = 36$, cerc de rază 6.

c) $y = \frac{4}{3} x$, dreaptă cu panta $\varphi = \text{arc tg}\, \frac{4}{3}$.

7.2.4. $x = \sin\left(\frac{\pi}{2} t + \frac{\pi}{2}\right) = \cos\frac{\pi}{2} t = 2\cos^2\frac{\pi}{4} t - 1 = \frac{y^2}{2} - 1$, ecuația unei parabole.

7.3. Oscilații amortizate și oscilații forțate

7.3.1. *a*) $\Delta = \ln\frac{A_0}{A_1} = \frac{1}{n}\ln\frac{A_0}{A_n} = \frac{1}{15}$.

b) $\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \delta^2} = \sqrt{\frac{k}{m} - \delta^2}$; (1)

$$\Delta = \frac{2\pi\delta}{\omega}. \quad (2)$$

Rezolvînd sistemul format din ecuațiile (1) și (2) se obține:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}} \cdot \sqrt{1 + \left(\frac{\Delta}{2\pi}\right)^2} = 1{,}000056\ T_0 = 0{,}344\ \text{s}$$

$$\delta = \frac{\Delta}{T} = 0{,}194\ \text{s}^{-1}.$$

7.3.2. La echilibru, $mg = kx_0$, deci pulsația oscilațiilor proprii este:

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{g}{x_0}}.$$

Rezultă:

$$\Delta = \delta T = \frac{2\pi\delta}{\sqrt{\frac{g}{x_0} - \delta^2}} \simeq 2\pi\delta \sqrt{\frac{x_0}{g}} = 0{,}266.$$

7.3.3. Raportul energiilor corespunzătoare celor două momente $t_1 = 0$ și $t_2 = 50$ s este: $\frac{E_1}{E_2} = \left(\frac{A_1}{A_2}\right)^2 = n.$

Dar $\frac{A_1}{A_2} = e^{\delta(t_2 - t_1)}$, deci $\ln \sqrt{n} = \delta(t_2 - t_1) = \frac{\Delta}{T}(t_2 - t_1) =$

$$= \frac{\Delta}{2\pi} \sqrt{\frac{g}{l}} \cdot (t_2 - t_1).$$

Lungimea pendulului rezultă:

$$l = g\left[\frac{\Delta\,(t_2 - t_1)}{2\pi \ln \sqrt{n}}\right]^2 = 0{,}994\ \text{m}.$$

7.3.4. $x = A_0 e^{-\delta t} \sin(\omega t + \alpha)$;

$$v(t) = \dot{x} = A_0 e^{-\delta t}[\omega \cos(\omega t + \alpha) - \delta \sin(\omega t + \alpha)];$$

$$v(t + T) = A_0 e^{-\delta(t+T)}[\omega \cos(\omega t + \alpha) - \delta \sin(\omega t + \alpha)].$$

Rezultă: $\frac{v(t+T)}{v(t)} = e^{-\delta T} = e^{-\Delta} = 0{,}86.$

Analog: $\frac{a(t+T)}{a(t)} = e^{-\Delta}.$

7.3.5. Ușa se poate deschide dacă acționăm asupra mînerului cu o forță a cărei perioadă este egală cu perioada proprie de oscilație a ușii.

7.3.6. La rezonanță, forța de frecare este egală cu forța exterioară:

$$F_r = rv_0 = F,$$

v_0 fiind amplitudinea vitezei la rezonanță;

$$v_0 = \omega A_0 = \frac{2\pi A_0}{T_0} = 5\pi \cdot 10^{-2}\ \text{m/s}.$$

Rezultă: $r = \frac{F}{v_0} = \frac{2}{\pi}\ \text{N} \cdot \text{s/m}.$

7.3.7. La rezonanța vitezelor, faza vitezei sistemului în decursul întregii perioade coincide cu faza forței exterioare, de aceea lucrul mecanic al forței exterioare în unitatea de timp este maxim.

7.3.8. $x = 0{,}029 \sin\left(2\pi t + \frac{\pi}{4}\right)$ m.

7.4. Sisteme oscilante cu două grade de libertate

7.4.1. Forțele de întindere din resorturi sînt (fig. 7.4.1R):

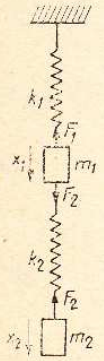


Fig. 7.4.1 R

$$F_1 = k_1 x_1; \quad F_2 = k_2 (x_2 - x_1).$$

Legea a doua a dinamicii se scrie pentru m_1 și m_2:

$$\begin{cases} -k_1 x_1 + k_2(x_2 - x_1) = m_1 \ddot{x}_1, \\ -k_2(x_2 - x_1) = m_2 \ddot{x}_2. \end{cases}$$

Se caută o soluție particulară de forma:

$$x_1 = A \sin(\omega t + \varphi), \quad x_2 = B \sin(\omega t + \varphi),$$

ω fiind o frecvență naturală a sistemului. Înlocuind, se obține sistemul:

$$\begin{cases} (k_1 + k_2 - m_1\omega^2) A - k_2 B = 0, \\ -k_2 A + (k_2 - m_2\omega^2) B = 0 \end{cases}$$

sau

$$\omega^4 - \left(\frac{k_1 + k_2}{m_1} + \frac{k_2}{m_2}\right)\omega^2 + \frac{k_1 k_2}{m_1 m_2} = 0.$$

Frecvențele naturale sînt date de relația:

$$\omega_{1,2}^2 = \frac{k_1 + k_2}{2m_1} + \frac{k_2}{2m_2} \pm \sqrt{\frac{1}{4}\left(\frac{k_1 + k_2}{m_1} + \frac{k_2}{m_2}\right)^2 - \frac{k_1 k_2}{m_1 m_2}}.$$

Soluția generală a ecuațiilor de mișcare este compusă din două mișcări armonice de frecvențe ω_1 și ω_2:

$$x_1 = A_1 \sin(\omega_1 t + \varphi_1) + A_2 \sin(\omega_2 t + \varphi_2),$$
$$x_2 = B_1 \sin(\omega_1 t + \varphi_1) + B_2 \sin(\omega_2 t + \varphi_2),$$

constantele determinîndu-se din condițiile inițiale.

7.4.2. Pentru oscilații mici, tensiunea în coardă poate fi considerată constantă. Legea a doua a dinamicii aplicată sistemului din figura 7.4.2R se scrie, în cazul general:

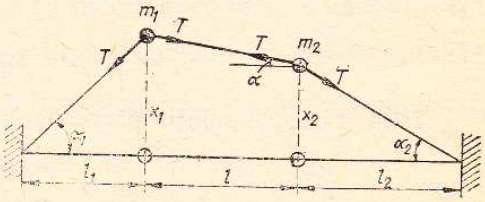


Fig. 7.4.2 R

$$\begin{cases} -T \sin\alpha_1 - T \sin\alpha = m_1 \ddot{x}_1, \\ +T \sin\alpha - T \sin\alpha_2 = m_2 \ddot{x}_2. \end{cases} \quad (1)$$

Aproximînd

$$\sin \alpha_1 \simeq \operatorname{tg} \alpha_1 = \frac{x_1}{l_1}, \quad \sin \alpha \simeq \operatorname{tg} \alpha = \frac{x_1 - x_2}{l}, \quad \sin \alpha_2 \simeq \operatorname{tg} \alpha_2 = \frac{x_2}{l_2},$$

sistemul (1) se scrie:

$$\begin{cases} -T\left(\dfrac{x_1}{l_1} + \dfrac{x_1 - x_2}{l}\right) = m_1 \ddot{x}_1, \\ T\left(\dfrac{x_1 - x_2}{l} - \dfrac{x_2}{l_2}\right) = m_2 \ddot{x}_2. \end{cases} \tag{2}$$

Luînd $m_1 = m_2 = m$ și $l_1 = l_2 = l$, și alegînd o soluție particulară de forma $x_1 = A \sin \omega t$, $x_2 = B \sin \omega t$, se obține sistemul:

$$\begin{cases} \left(\dfrac{2T}{l} - m\omega^2\right) A - \dfrac{T}{l} B = 0, \\ -\dfrac{T}{l} A + \left(\dfrac{2T}{l} - m\omega^2\right) B = 0 \end{cases} \tag{3}$$

ce ne dă ecuația frecvențelor:

$$\omega^4 - \frac{4T}{lm}\omega^2 + \frac{3T^2}{l^2 m^2} = 0.$$

Rezultă: $\omega_1 = \sqrt{\dfrac{T}{lm}}$; $\omega_2 = \sqrt{\dfrac{3T}{lm}}$.

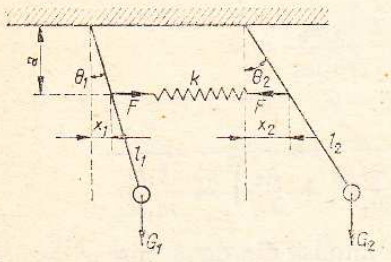


Fig. 7.4.3 R

7.4.3. Legea a doua a dinamicii aplicată sistemului din figura 7.4.3 R se scrie:

$$-m_1 g l_1 \sin \theta_1 + Fa \cos \theta_1 = m_1 l_1^2 \ddot{\theta}_1,$$

$$-m_2 g l_2 \sin \theta_2 - Fa \cos \theta_2 = m_2 l_2^2 \ddot{\theta}_2,$$

în care $F = k(x_2 - x_1) \simeq ka(\theta_2 - \theta_1)$. Luînd $m_1 = m_2 = m$, $l_1 = l_2 = l$ și alegînd o soluție particulară de forma, $\theta_1 = A \sin \omega t$, $\theta_2 = B \sin \omega t$, se obține ecuația frecvențelor:

$$\omega^4 - 2\left(\frac{g}{l} + \frac{ka^2}{ml^2}\right)\omega^2 + \left(\frac{g^2}{l^2} + \frac{2ka^2 g}{ml^3}\right) = 0$$

și

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{g}{l}}, \quad \omega_2 = \sqrt{\frac{g}{l} + \frac{2ka^2}{ml^2}}.$$

7.4.4. Luînd o soluție particulară de forma:

$$x = A \cos(\omega t + \varphi),$$

$$0 = B \cos(\omega t + \varphi),$$

obținem, după înlocuiri, ecuația frecvențelor:

$$\omega^4 - 2\,000\omega^2 + 1\,000^2 - 10\,000 = 0,$$

din care rezultă:

$$\omega_1 = 30 \text{ rad/s} \quad \text{și} \quad \omega_2 = 33{,}1 \text{ rad/s}.$$

Soluția generală este compusă din două mișcări armonice de pulsații ω_1 și ω_2.

Se obține $\frac{A_1}{B_1} = 1$ și $\frac{A_2}{B_2} = -1$, astfel că ecuațiile de mișcare devin:

$$x = A_1 \cos(30\,t + \varphi_1) + A_2 \cos(33{,}1\,t + \varphi_2),$$
$$\theta = A_1 \cos(30\,t + \varphi_1) - A_2 \cos(33{,}1\,t + \varphi_2),$$

unde cele patru necunoscute A_1, A_2, φ_1, φ_2 se determină din condițiile inițiale:

$$x(0) = 0,\ \dot{x}(0) = 0,\ \theta(0) = 1 \text{ rad},\ \dot{\theta}(0) = 0.$$

Rezultă:
$$x = \frac{1}{2}\cos 30\,t - \frac{1}{2}\cos 33{,}1\,t,$$
$$\theta = \frac{1}{2}\cos 30\,t + \frac{1}{2}\cos 33{,}1\,t.$$

7.4.5. Legea a doua a dinamicii aplicată maselor m_1 și m_2 ale sistemului din figura 7.4.5 R se scrie:

$$-k_1(x - r\theta) = m_1\ddot{x},$$
$$-k_2 r^2\theta - k_1(r\theta - x) = I_0\ddot{\theta},$$

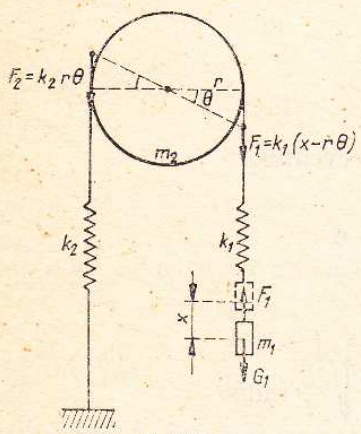


Fig. 7.4.5 R

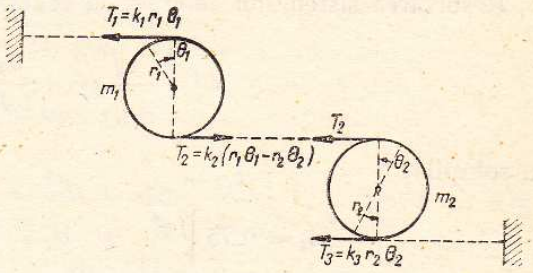


Fig. 7.4.6 R

unde x este deplasarea masei m_1 din poziția de echilibru (pentru care $m_1 g = k_1 x_0$) și $I_0 = \frac{1}{2} m_2 r^2$ este momentul de inerție al cilindrului față de centrul său. După alegerea unei soluții particulare, se ajunge la ecuația frecvențelor:

$$\omega^4 - \left[\frac{2(k_1 + k_2)}{m_2} + \frac{k_1}{m_1}\right]\omega^2 + \frac{2k_1k_2}{m_1m_2} = 0.$$

7.4.6. Legea a doua a dinamicii aplicată fiecărui disc al sistemului din figura 7.4.6 R se scrie:

$$-T_1r_1 - T_2r_1 = I_1\ddot{\theta}_1, \quad T_2r_2 - T_3r_2 = I_2\ddot{\theta}_2,$$

în care: $T_1 = k_1 r_1 \theta_1$, $T_2 = k_2(r_1\theta_1 - r_2\theta_2)$, $T_3 = k_3 r_2 \theta_2$.

Luînd $k_1 = k_2 = k$, $m_1 = m_2 = m$, $r_1 = r_2 = r$, $I_1 = I_2 = I = \frac{mr^2}{2}$ și alegînd o soluție particulară, se obține ecuația frecvențelor:

$$\omega^4 - \frac{8k}{m}\omega^2 + \frac{12k^2}{m^2} = 0,$$

din care rezultă:

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{2k}{m}}, \quad \omega_2 = \sqrt{\frac{6k}{m}}.$$

7.4.7. Scriind legea a doua a dinamicii pentru masele m_1 și m_2 obținem:

$$\begin{cases} -m_2 g l_2 \sin\theta_2 - m_2 l_1 l_2 \ddot{\theta}_1 = m_2 l_2^2 \ddot{\theta}_2, \\ -m_1 g l_1 \theta_1 - m_2 g l_1 \theta_1 - m_2(l_1\ddot{\theta}_1 + l_2\ddot{\theta}_2) l_1 = m_1 l_1^2 \ddot{\theta}_1. \end{cases}$$

Luînd $\sin\theta \simeq \theta$, $l_1 = l_2 = l$, $m_1 = m_2$, obținem:

$$\begin{cases} \ddot{\theta}_1 + \frac{g}{l}\theta_1 + \frac{\ddot{\theta}_2}{2} = 0, \\ \ddot{\theta}_2 + \ddot{\theta}_1 + \frac{g}{l}\theta_2 = 0. \end{cases}$$

Rezolvarea sistemului conduce la ecuația frecvențelor:

$$\omega^4 - \frac{4g}{l}\omega^2 + \frac{2g^2}{l^2} = 0$$

cu soluțiile:

$$\omega_1 = 0{,}75\sqrt{\frac{g}{l}} \quad \text{și} \quad \omega_2 = 1{,}86\sqrt{\frac{g}{l}} \text{ rad/s}.$$

7.5. Unde plane

7.5.1. Intervalul de timp între două picături este:

$$t = \frac{d}{c} = 1 \text{ s}.$$

Rezultă $n = 60$ picături/minut.

7.5.2. *a)* $t_1 = \frac{x_1}{c} = 16 \cdot 10^{-3}$ s; $\varphi_1 = \frac{2\pi}{\lambda} x_1 = 288°$.

b) $x = 0{,}833$ m.

c) $\varphi = \frac{2\pi}{\lambda} \cdot \frac{\lambda}{2} = \pi$ rad.

7.5.3. $\xi(x, t) = A \sin 2\pi\nu\left(t - \frac{x}{c}\right) = 0{,}1 \sin\left(8\pi \cdot \frac{1}{4}\right) = 0$;

$v = \frac{d\xi}{dt} = A 2\pi\nu \cdot \cos 2\pi\nu\left(t - \frac{x}{c}\right) = A 2\pi\nu = 2{,}513$ m/s;

$a = -(2\pi\nu)^2 \xi = 0$.

7.5.4. La distanțele x_1 și x_2, unde oscilațiile sînt în fază, la momentul t sînt satisfăcute următoarele ecuații:

$$(\omega_1 t - k_1 x_1) - (\omega_2 t - k_2 x_1) = 0,$$

$$(\omega_1 t - k_1 x_2) - (\omega_2 t - k_2 x_2) = 2\pi, \text{ în care } k = \frac{2\pi}{\lambda}.$$

Rezultă:

$$x_2 - x_1 = \frac{2\pi}{k_2 - k_1} = \frac{\lambda_1 \lambda_2}{\lambda_1 - \lambda_2} \tag{1}$$

și

$$x_1 = \frac{(\omega_2 - \omega_1) t}{k_2 - k_1}.$$

Viteza de deplasare a punctelor în fază va fi:

$$c = \frac{dx_1}{dt} = \frac{\omega_2 - \omega_1}{k_2 - k_1} = \frac{c_2 \lambda_1 - c_1 \lambda_2}{\lambda_2 - \lambda_1}. \tag{2}$$

Rezolvînd sistemul format din ecuațiile (1) și (2) obținem:

$$\lambda_1 = \frac{(c_1 - c_2)(x_2 - x_1)}{c + c_2} = 1{,}25 \text{ m};$$

$$\lambda_2 = \frac{(c_1 - c_2)(x_2 - x_1)}{c + c_2} = 1 \text{ m}.$$

7.5.5. Glonțul produce în fiecare moment o undă de compresie ce se propagă în toate direcțiile, sub forma unei unde sferice. Deoarece viteza v a glonțului este mai mare decît viteza c de propagare a undei, frontul de undă

are forma unui con în vîrful căruia se află în fiecare moment glonțul (fig.7.5.5 R). Unghiul α făcut de direcția de mișcare cu generatoarea conului este:

$$\alpha = \arcsin \frac{c}{v}.$$

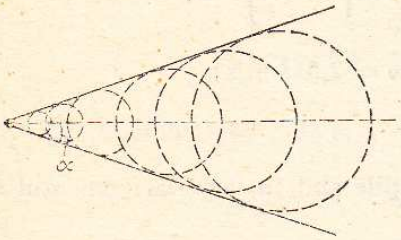


Fig. 7.5.5 R

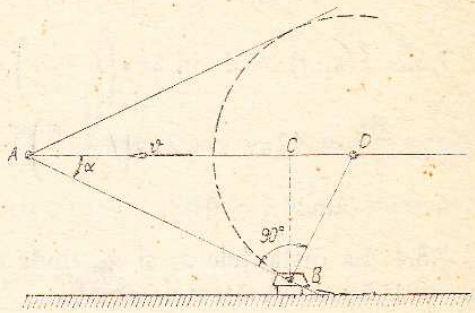


Fig. 7.5.6 R

7.5.6. În momentul cînd unda sferică produsă de avionul ce se afla în punctul D atinge casa aflată în punctul B, avionul se află în punctul A (fig. 7.5.6 R). Distanța căutată AB este:

$$AB = \frac{BC}{\sin \alpha} = BC \cdot \frac{v}{c} = 8{,}82\,\text{km},$$

c fiind viteza de propagare a undei, egală cu 340 m/s.

7.5.7. În mod obișnuit, viteza vîntului la o anumită altitudine deasupra Pămîntului este mai mare decît la suprafața sa. Deoarece viteza undelor sonore este mai mare în sensul în care bate vîntul decît împotriva lui, suprafețele de undă, ce în absența vîntului ar avea forma sferică, cu centrul în sursa sonoră, își schimbă forma (liniile pline în fig. 7.5.7 R). Sunetul propagîndu-se în fiecare punct perpendicular pe suprafețele de undă este deviat în sus (curba AB) împotriva vîntului și nu ajunge la om, ci este deviat către Pămînt (curba AC) în sensul vîntului, fiind auzit mai bine de om.

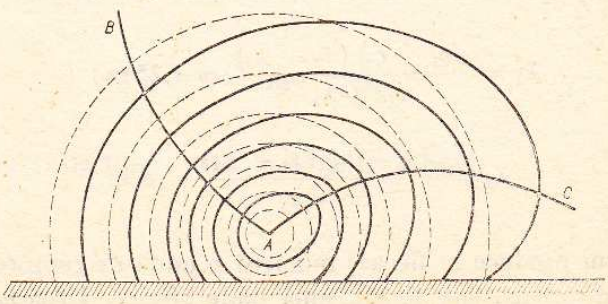


Fig. 7.5.7 R

Capitolul 8

ACUSTICA

8.1. Lungimea de undă este dată de relația:

$$\lambda = c/\nu$$

și folosind relația (8.2) dintre viteza sunetului și temperatura mediului se obține:

$$\lambda_{aer} = 0{,}782 \text{ m}.$$

În același mod:

$$\lambda_{apa} = 3{,}3 \text{ m}.$$

8.2. $\lambda = 0{,}036$ m; $H = 290$ m.

8.3. Frecvența sunetului nu variază la trecerea dintr-un mediu în altul, ci numai viteza de propagare. Se obține, folosind datele pentru E și ρ din Anexele IV, V:

$$\frac{\lambda_{otel}}{\lambda_{aer}} = 15.$$

8.4. Folosind formula (8.1) în care $E = \varkappa$ se obține:

$$\varkappa = \rho c^2 = 1{,}415 \cdot 10^9 \text{ N/m}^2.$$

8.5. *a*) $a_1 = 7{,}07 \cdot 10^{-10}$ m și $a_2 = 2{,}83 \cdot 10^{-4}$ m; $p_m^{(1)} = 5 \cdot 10^{-4}$ N/m^2 și $p_m^{(2)} = 200$ N/m^2.

b) Conform formulei (8.3):

$$v_{m_1} = 1{,}14 \cdot 10^{-6} \text{ m/s} \text{ și } v_{m_2} = 0{,}455 \text{ m/s}.$$

c) Deoarece

$$I = \frac{p_m^2}{2\rho c},$$

rezultă că:

$$I_1 = 2{,}84 \cdot 10^{-10} \text{ W/m}^2 \text{ și } I_2 = 45{,}5 \text{ W/m}^2.$$

8.6. $I_{max}/I_{min} = 2{,}84 \cdot 10^{13}$.

8.7. 1 kHz.

8.8. Nivelele de intensitate auditivă ale sunetului produs, respectiv, de o mașină și de N mașini se exprimă prin relațiile:

$$N_{a_2} = 10 \log \frac{I_{a_2}}{I_{a_0}}, \quad N_{a_1} = 10 \log \frac{I_{a_1}}{I_{a_0}};$$

de unde

$$N_{a_2} - N_{a_1} = 10 \log \frac{I_{a2}}{I_{a_1}},$$

iar

$$I_{a_2}/I_{a_1} = 10^5.$$

Atunci

$$N = 100\,000 \text{ (mașini)}.$$

8.9. Conform datelor problemei:

$$N_{s_1} - N_{s_2} = 0{,}1 \text{ B}.$$

Înlocuind expresiile nivelelor de intensitate sonoră conform relației (8.7), se obține:

$$N_{s_1} - N_{s_2} = \log \frac{I_1}{I_2},$$

de unde

$$I_1/I_2 = 10^{0{,}1} = 1{,}26,$$

iar

$$I_2 = 7{,}93 \cdot 10^{-2} \text{ W/m}^2.$$

Amplitudinea presiunii primului sunet este:

$$p_{m_1} = \sqrt{2 I_1 \rho c} = 9{,}4 \text{ N/m}^2.$$

Deoarece diferența nivelelor sonore ale sunetelor se poate exprima și în modul următor:

$$N_{s_1} - N_{s_2} = 2 \log \frac{p_{m_1}}{p_{m_2}},$$

rezultă că:

$$p_{m_1}/p_{m_2} = 10^{0{,}05} = 1{,}12,$$

iar

$$p_{m_2} = 8{,}4 \text{ N/m}^2.$$

8.10. $p = 0{,}1$ N/m^2; $N_s = 71$ dB.

8.11. Nivelul de intensitate sonoră pentru toate cele patru sunete este:

$$N_s = 71 \text{ dB}.$$

Nivelele de intensitate auditivă sînt respectiv:

$$N_{a_1} < 0, \qquad N_{a_3} = 71 \text{ fon},$$

$$N_{a_2} = 46 \text{ fon}, \quad N_{a_4} = 70 \text{ fon}.$$

Deşi nivelele de intensitate sonoră ale celor patru sunete se exprimă prin acelaşi număr, nivelele de intensitate auditivă diferă foarte mult între ele, ceea ce corespunde senzaţiei foarte diferite produse de ele. Astfel primul sunet nici nu se aude, deşi are tot 71 dB.

8.12. Nivelul de intensitate auditivă la distanţa d_1 de sursă este:

$$N_{a_1} = 10 \log \frac{I_{d_1}}{I_{a_0}} = 10 \log \frac{I}{d_1^2} \cdot \frac{1}{I_{a_0}} = 10 \log \frac{I}{I_{a_0}} - 20 \log d_1$$

unde I este intensitatea sunetului în sursă. La distanţa d_2 nivelul de intensitate auditivă este dat de o relaţie analoagă. Introducînd în expresia lui N_{a_2} pe N_{a_1} se obţine:

$$N_{a_2} = N_{a_1} + 20 \log \frac{d_1}{d_2} = 26 \text{ fon}.$$

Pentru cazul în care sunetul nu se mai aude:

$$N_{a_3} = 0$$

sau

$$N_{a_1} + 20 \log \frac{d_1}{d_3} = 0,$$

de unde

$$d_3 = 200 \text{ m}.$$

8.13. Să notăm cu $I_a(x, t)$ intensitatea sunetului la distanţa x de diapazon şi la momentul t după care acesta a început să vibreze. Fie α coeficientul de amorsare al oscilaţiilor diapazonului. Atunci intensitatea sunetului la distanţa x de diapazon şi după t secunde de la începerea oscilaţiei diapazonului va fi dată de relaţia:

$$I_a(x, t) = \frac{I_a(0,0)}{x^2} \exp\{-\alpha t\}.$$

Fie t_1 timpul după care la distanţa d_1 sunetul nu se mai aude, adică:

$$N_a(d_1, t_1) = 0.$$

Aceasta se mai scrie:

$$\log \frac{I_a(0, 0)}{I_{a_0}} \cdot \frac{\exp\{-\alpha t_1\}}{d_1^2} = 0,$$

de unde

$$[I_a(0,0)/I_{a_0}] \exp\{-\alpha t_1\} = d_1^2.$$

Dacă se notează cu t_2 timpul după care la distanța d_2, sunetul nu se mai aude, se obține în mod analog relația:

$$[I_a(0,0)/I_{a_0}] \exp\{-\alpha t_2\} = d_2^2.$$

Atunci

$$\exp\{\alpha(t_1 - t_2)\} = d_2^2/d_1^2,$$

de unde, prin înlocuiri numerice:

$$\alpha = 0{,}230 \text{ s}^{-1}.$$

8.14. În acest caz,

$$I_a(x, t) = \frac{I_a(0,0)}{x^2} \exp\{-\alpha t\} \exp\{-mx\},$$

astfel că se obține:

$$\alpha = 0{,}234 \text{ s}^{-1}$$

și eroarea este

$$\varepsilon = 1{,}7\%.$$

8.15. $m = 5{,}75 \text{ m}^{-1}$.

8.16. Intensitatea sunetului la distanța d de sursă este:

$$I_a = \frac{P}{4\pi d^2} \exp\{-md\}.$$

Folosind expresia (8.7) pentru nivelul de intensitate sonoră se obține:

$$P = 4\pi d^2 I_0 10^{N_s} e^{md}$$

sau numeric

$$P = 3{,}4 \cdot 10^{-4} \text{ W}.$$

8.17. $N_s = 39$ dB; $N_a = 19$ fon.

8.18. Combinînd formulele (8.11) și (8.12) se obține:

$$\nu' = \nu \frac{1 - v_1/c}{1 + v_2/c} \cong \nu\left(1 - \frac{v_1 + v_2}{c}\right),$$

deoarece $v_1, v_2 \ll c$, unde

$$c = c_0 \sqrt{1 + \alpha t}.$$

Rezultă:

$$\nu' = 540 \text{ Hz}.$$

8.19 *a*) 608 Hz; *b*) 592 Hz.

8.20. Frecvența sunetului ecoului este modificată prin efect Doppler: locomotiva se apropie de perete cu viteza v; atunci pentru orice observator, sunetul reflectat de perete va avea frecvența modificată prin apropierea sursei de observator, avînd în vedere că prin reflexie, frecvența nu se schimbă.

Frecvența sunetului ecoului va fi deci:

$$\nu' = \nu \frac{1}{1 - \frac{v}{c}} = 350 \text{ Hz}.$$

a) Mecanicul (observatorul) se apropie de peretele reflectător și deci el va sesiza o frecvență a ecoului:

$$\nu_1' = \nu' \left(1 + \frac{v}{c}\right) = 360 \text{ Hz}.$$

Dar mecanicul aude și sunetul direct, avînd frecvență nemodificată, ν, deoarece se mișcă odată cu sursa.

Atunci, numărul de bătăi sesizate de mecanic va fi de 20.

b) Observatorul de pe sol aude ecoul cu frecvența calculată, $\nu' = 350$ Hz.

Sunetul direct va avea, pentru acest observator, frecvența modificată datorită depărtării sirenei locomotivei, deci:

$$\nu_2' = \nu \left(1 - \frac{v}{c}\right) = 330 \text{ Hz}.$$

Numărul de bătăi sesizate de acest observator va fi tot de 20.

8.21. În acest caz, sursa se apropie la început de observator, dar direcția sa de deplasare, SS_1, nu coincide cu direcția de percepere a sunetului, deci trebuie să găsim formula Doppler pentru acest caz.

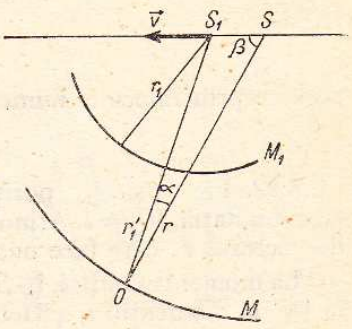


Fig. 8.21 R

Fie v viteza de deplasare a sursei în direcția indicată în figură și să luăm ca origine a timpului momentul cînd sursa aflată în S emite o vibrație; vibrațiile succesive sînt emise apoi la momentele T, $2T$ etc. La momentul T, sursa ocupă poziția S_1, astfel încît $SS_1 = vT$.

La un moment de timp oarecare t, aceste vibrații propagîndu-se, se află pe sferele M și M_1, de raze:

$$r = ct$$

și

$$r_1 = c(t - T) = r - cT,$$

centrate în punctele S, respectiv S_1.

Observatorul primește vibrația M_1 la momentul $(t + T')$, unde T' este perioada vibrației modificate prin efect Doppler.

Raza S_1O este:

$$r_1' = r_1 + cT' = (r - cT) + cT'.$$

Proiectăm conturul SS_1O pe direcția SO și scriem că această proiecție este egală cu r. Vom presupune că SO este mare în raport cu SS_1, pentru ca α să fie mic și proiecția lui S_1O să poată fi confundată cu r_1'.

Prin proiectare se obține:

$$r = v\,T\cos\beta + r_1'.$$

Notînd $v\cos\beta = v_r$ (viteză radială) și înlocuind pe r_1', prin calcule simple se obține:

$$T' = T\left(1 - \frac{v_r}{c}\right),$$

adică o formulă asemănătoare pentru frecvențele ν' și ν cu formula (8.11) aplicată la cazul apropierii sursei de observatorul fix, deosebită de aceasta prin înlocuirea vitezei de deplasare a sursei prin componenta radială a acestei viteze (v_r).

Folosind datele problemei, observăm că ne aflăm într-adevăr în aproximația α foarte mic, deorece în acest caz $T = 2$ ms, deci $SS_1 = 0{,}2$ m și $SS_1 \ll SO$ (SO variază între 1 410 m și 1 000 m).

Viteza radială a avionului variază între $v\cos 45°$ în S (fig. 8.21) și $-v\cos 45°$ în S'', trecînd prin zero în S'.

Deci frecvența sunetului perceput de observatorul fix va varia între:

$$\frac{\nu}{1 + \frac{v_r}{c}} \leqslant \nu' \leqslant \frac{\nu}{1 - \frac{v_r}{c}},$$

ceea ce prin înlocuiri numerice dă:

$$414\ \text{Hz} \leqslant \nu' \leqslant 632\ \text{Hz}.$$

8.22. Fie S și O_1 poziția sursei, respectiv a unuia dintre observatori; facem notația $SO_1 = l$. Atmosfera se deplasează în bloc cu o viteză reprezentată de vectorul $\vec{v}$, care face unghiul α cu direcția SO_1.

La momentul inițial, în S se produce un sunet de scurtă durată, care ajunge în O_1 la momentul t, astfel că viteza aparentă de propagare a sunetului este $c_1' = l/t$. Să calculăm c_1' în funcție de viteza c de propagare în aerul imobil.

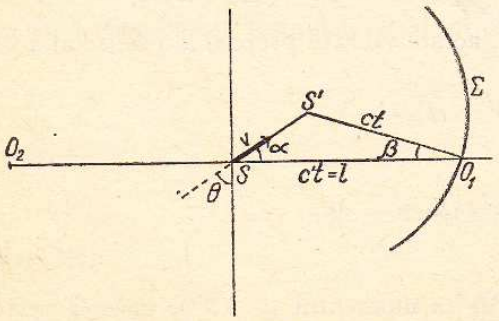


Fig. 8.22 R

Fie un sistem de axe ce se deplasează cu o mișcare de translație uniformă, rectilinie, avînd viteza $\vec{v}$, față de care aerul este imobil. În acest sistem de referință inerțial, mobil, vibrația produsă la momentul zero în S se propagă prin unde sferice avînd viteza c de propagare. La momentul t, vibrația se află deci pe o sferă Σ, de rază $r = ct$ și

avînd centrul în S' definit de vectorul $\overrightarrow{SS'} = \vec{v}t$. La momentul t, această sferă trece prin O_1.

Proiectăm conturul $SS'O_1$ pe direcția SO_1 și notînd cu β unghiul $S'O_1S$, obținem, după simplificare cu t:

$$c_1' = c \cos \beta + v \cos \alpha.$$

Pentru cazul în care vîntul are viteză mică în comparație cu viteza sunetului, β este un unghi, mic astfel încît $\cos \beta \cong 1$ și deci:

$$c_1' = c + v \cos \alpha,$$

adică viteza de propagare a sunetului este mărită cu proiecția vitezei de propagare a vîntului pe direcția de propagare.

Pentru observatorul O_2, situat simetric în direcție opusă, avem deci:

$$c_2' = c - v \cos \alpha.$$

Diferența de timp căutată (introducînd unghiul θ) este:

$$\Delta t = \frac{2lv \sin \theta}{c^2 - v^2 \sin^2 \theta} = 0{,}15 \text{ s}.$$

8.23. Presupunînd o variație liniară a temperaturii aerului cu înălțimea, se obține o variație a vitezei sunetului cu altitudinea:

$$c = c_0 \sqrt{1 + \alpha(\theta_s + \beta h)}$$

unde c_0 este viteza sunetului la 0°C, θ_s este temperatura aerului la sol și h este altitudinea.

Presupunem că prin punctul O (fig. 8.23 R, *a*) trece o undă plană P. Pentru a construi o nouă suprafață de undă, trebuie să realizăm construcția lui Huygens. Datorită variației vitezei sunetului cu altitudinea, undele sferice după același interval de timp vor avea raze din ce în ce mai mici cu creșterea lui h, astfel că înfășurătoarea lor, suprafața de undă, se va înclina față de verticală, iar direcția de propagare a energiei, care este perpendiculară pe aceasta, se îndepărtează de la sol (fig. 8.23 R, *a*).

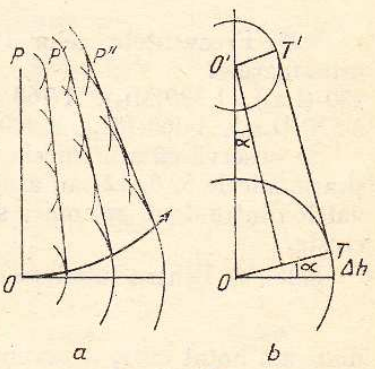


Fig. 8.23 R

Ridicarea de la sol a direcției de propagare a energiei la distanța $d = OT$ (vezi fig. 8.23 R, *b*) este:

$$\Delta h = OT \sin \alpha = OT \frac{OT - O'T'}{h},$$

de unde

$$d = \sqrt{\frac{\Delta h \cdot h}{1 - c_h/c_s}}.$$

Folosind expresia vitezei sunetului funcție de temperatură și de altitudine, scrisă anterior și făcînd aproximațiile permise de faptul că $\alpha\theta \ll 1$, se obține:

$$d = \sqrt{\frac{2\Delta h}{-\beta\alpha}} = 500 \text{ m}.$$

8.24. Folosind expresia sunetului fundamental emis de o coardă în funcție de lungimea acesteia, se obține că raportul frecvențelor în cele două cazuri este:

$$\nu_1/\nu_2 = l_2/l_1,$$

iar din cauză că ν_2 este egal cu frecvența diapazonului, atunci:

$$\nu_2 - \nu_1 = n.$$

Efectuînd calculele se obține:

$$\nu = 400 \text{ Hz}.$$

8.25. Deoarece

$$c = \lambda\nu$$

rezultă că:

$$c = 2l\nu = \sqrt{\frac{Pl}{m}} = 200 \text{ m/s}.$$

8.26. Cunoscînd frecvența lui La, se poate afla frecvența lui Do din aceeași octavă folosind intervalul cunoscut de 5/3, conform cu (8.16). Rezultă:

$$\nu_{Do} = 264 \text{ Hz}.$$

Atunci frecvența lui Sol este:

$$\nu_{Sol} = \frac{3}{2} 264 = 396 \text{ Hz}.$$

8.27. Frecvențele celor 12 armonice și notele care le corespund sînt următoarele:
880 (La_2), 1 320(Mi_3), 1 760 (La_3), 2 200($\simeq Do_4^{\sharp}$), 2 640 (Mi_4), 3 080 ($\simeq Sol_4$), 3 520 (La_4), 4 060 (Si_4), 4 400 ($\simeq Do_5^{\sharp}$), 4 840 ($\simeq Re_5$), 5 280 Hz (Mi_5).

Se observă că armonicele 1, 2, 4, 8 sînt unele față de altele la octavă, ca și armonicele 3, 6, 12 sau armonicele 5, 10. Se observă de asemenea că intervalele dintre două armonice succesive scad pe măsură ce ordinul armonicelor crește.

8.28. *a*) Pentru tubul sonor deschis, conform cu (8.15):

$$\nu_4 = 4\nu_1,$$

unde am notat cu ν_1 frecvența fundamentalei tubului deschis. Rezultă:

$$\nu_4 = 1\,056 \text{ Hz}.$$

Pentru tubul sonor închis, conform cu (8.14), armonica de ordinul V va avea frecvența:

$$\nu_5 = \frac{9}{2}\nu_1 = 1\,188 \text{ Hz}.$$

b) Intervalul muzical este $\nu_5/\nu_4 = 9/8$. Deoarece ν_4 este dubla octavă, ea este Do_3. ν_5 este Re_3, conform cu (8.16).

8.29. Temperatura de 36,4°C. Nota Do_2.

8.30. Nota Fa_2, care este armonica a 16-a a cornului în Fa și armonica a 12-a a celui în Si^b.

Mărimile fundamentale ale mecanicii în SI

Mărimea	Simbolul mărimii	Ecuația dimensională	Unitatea de măsură	Simbolul unității
lungime	l, L	L	metru	m
masă	m	M	kilogram	kg
timp	t	T	secundă	s

Anexa II

Mărimile derivate ale mecanicii în SI

Mărimea	Simbolul mărimii	Ecuația dimensională	Unitatea de măsură	Simbolul unității
viteza	$v = \frac{l}{t}$	LT^{-1}	metru pe secundă	m/s
accelerația	$a = \frac{v}{t}$	LT^{-2}	metru pe secundă la pătrat	m/s^2
frecvența	ν	T^{-1}	secundă $^{-1}$	s^{-1}
unghi plan	α	—	radian	rad
unghi solid	Ω	—	steradian	str
viteza unghiulară	$\omega = \frac{\alpha}{t}$	T^{-1}	radian pe secundă	rad/s
accelerația unghiulară	$\varepsilon = \frac{\omega}{t}$	T^{-2}	radian pe secundă la pătrat	rad/s^2
suprafața	$S = l^2$	L^2	metru pătrat	m^2
volumul	$V = l^3$	L^3	metru cub	m^3
densitatea	$\rho = \frac{m}{V}$	ML^{-3}	kilogram pe metru cub	kg/m^3
forța	$F = ma$	MLT^{-2}	newton	N
moment de inerție	$I = mr^2$	ML^2	kilogram-metru pătrat	$kg \cdot m^2$
lucru mecanic (energie)	$L = Fl$	ML^2T^{-2}	joule	J
putere	$P = \frac{L}{t}$	ML^2T^{-3}	watt	W
presiune	$p = \frac{F}{S}$	$ML^{-1}T^{-2}$	newton pe metru pătrat	N/m^2

Alte unități de măsură folosite pentru mărimile mecanice

Mărimea	Unitatea mărimii	Simbolul unității	Legătura cu SI
lungime	centimetru	cm	10^{-2} m
	micron	μ	10^{-6} m
	angström	Å	10^{-10} m
masă	gram	g	10^{-3} kg
timp	ora	h	3 600 s
	minut	min	60 s
unghi plan	grad	°	$\pi/180$ rad
	minut	′	$\pi/108 \cdot 10^{-2}$ rad
	secunda	″	$\pi/648 \cdot 10^{-3}$ rad
	rotații	—	2π rad
suprafața	centimetru pătrat	cm^2	10^{-4} m^2
	ar	a	10^2 m^2
	hectar	ha	10^4 m^2
volum	centimetru cub	cm^3	10^{-6} m^3
	litru	l	10^{-3} m^3
densitate	gram pe centimetru cub	g/cm^3	10^3 kg/m^3
viteza	centimetru pe secundă	cm/s	10^{-2} m/s
accelerația	centimetru pe secundă la pătrat	cm/s^2	10^{-2} m/s^2
viteza unghiulară	rotații pe minut	—	$\pi/30$ rad/s
	rotații pe secundă	—	2π rad/s
forța	dina	dyn	10^{-5} N
	kilogram-forță	kgf	9,8 N
moment de inerție	gram-centimetru pătrat	$g \cdot cm^2$	10^{-7} kgm^2
lucrul mecanic (energie)	erg	erg	10^{-7} J
	watt-oră	$W \cdot h$	$3{,}6 \cdot 10^3$ J
putere	erg pe secundă	erg/s	10^{-7} W
presiune	dina pe centimetru pătrat	dyn/cm^2	10^{-1} N/m^2
	bar	bar	10^5 N/m^2
	milimetri coloană de mercur	mm Hg	133,3 N/m^2
	milimetri coloană de apă	mm H_2O	9,80 N/m^2
	atmosfera tehnică	at	$9{,}8 \cdot 10^4$ N/m^2
	atmosfera fizică	atm	$1{,}013 \cdot 10^5$ N/m^2

Anexa IV

Densitatea unor corpuri la temperatura camerei (18–24°C) în kg/m³

Gaze

Substanța	ρ
Aer	1,293
Hidrogen	0,089
Oxigen	1,429
Bioxid de carbon	1,977
Heliu	0,178

Lichide

Substanța	ρ
Apă	1 000
Benzen	800
Petrol	800
Mercur	13 600
Alcool	790

Solide

Substanța	ρ	Substanța	ρ
Aluminiu	2 700	Nichel	8 800
Fier	7 900	Platina	21 400
Alamă	8 400	Zinc	7 000
Gheață	900	Oțel	7 700
Cupru	8 600	Argint	10 500

Anexa V

Cîteva constante elastice de material

Corpul	Modulul lui Young, 10^{11} N/m²	Rezistența la rupere, 10^7 N/m²	Viteza sunetului, 10^3 m/s
Aluminiu	0,73	25	5,1
Plumb	0,17	2	1,3
Fier	2,13	50	5,3
Oțel	2,0	200	5,1
Aur	0,80	27	2,1
Cupru	1,2	40	3,9
Nichel	1,99	39	5,0
Platina	1,7	30	2,7
Argint	0,79	29	2,7
Zinc	0,4	13	3,7
Sticlă	0,7	3	5
Lemn	0,1	7	3
Cauciuc	10^{-5}	—	0,05
Apă	—	—	1,45
Aer (la 0°C)	—	—	0,332

Cîteva constante astronomice

Raza medie a Pămîntului	$6{,}37 \cdot 10^6$ m
Densitatea medie a Pămîntului	$5{,}5 \cdot 10^3$ kg/m^3
Masa Pămîntului	$5{,}96 \cdot 10^{24}$ kg
Raza Soarelui	$6{,}95 \cdot 10^8$ m
Masa Soarelui	$1{,}97 \cdot 10^{30}$ kg
Raza Lunii	$1{,}74 \cdot 10^6$ m
Masa Lunii	$7{,}3 \cdot 10^{22}$ kg
Distanța medie Pămînt-Lună	$3{,}84 \cdot 10^8$ m
Perioada de rotație a Lunii în jurul Pămîntului	27 zile, 7h, 43 minute
Constanta de gravitație	$6{,}67 \cdot 10^{-11}$ m^3/kg $\cdot$ s^2
Accelerația gravitațională	9,81 m/s^2

Accelerația gravitațională în orice loc de pe Pămînt se calculează cu ajutorul relației: $g = 980{,}616 - 2{,}5928 \cos (2 \times \text{latitudinea}) + 0{,}0068 \cos^2 (2 \times \text{latitudinea}) - 0{,}0003 \times$ × înălțimea în m.

Anexa VII

Funcțiile trigonometrice ale unghiurilor

Grade	sin α	cos α	tg α	ctg α	
↓					
0	0,0000	1,0000	0,0000		90
1	0,0175	0,9998	0,0175	57,2900	89
2	0,0349	0,9994	0,0349	28,6363	88
3	0,0523	0,9986	0,0524	19,0811	87
4	0,0698	0,9976	0,0699	14,3007	86
5	0,0872	0,9962	0,0875	11,4301	85
6	0,1045	0,9945	0,1051	9,5144	84
7	0,1219	0,9925	0,1228	8,1444	83
8	0,1392	0,9903	0,1405	7,1154	82
9	0,1564	0,9877	0,1584	6,3138	81
10	0,1736	0,9848	0,1763	5,6713	80
11	0,1908	0,9816	0,1944	5,1446	79
12	0,2079	0,9781	0,2126	4,7046	78
13	0,2250	0,9744	0,2309	4,3315	77
14	0,2419	0,9703	0,2493	4,0108	76
15	0,2588	0,9659	0,2679	3,7321	75
16	0,2756	0,9613	0,2867	3,4874	74
17	0,2924	0,9563	0,3057	3,2709	73
18	0,3090	0,9511	0,3249	3,0777	72
19	0,3256	0,9455	0,3443	2,9042	71
20	0,3420	0,9397	0,3640	2,7475	70

Grade	sin α	cos α	tg α	ctg α	
21	0,3584	0,9336	0,3839	2,6051	69
22	0,3746	0,9272	0,4040	2,4751	68
23	0,3907	0,9205	0,4245	2,3559	67
24	0,4067	0,9135	0,4452	2,2460	66
25	0,4226	0,9063	0,4663	2,1445	65
26	0,4384	0,8988	0,4877	2,0503	64
27	0,4540	0,8910	0,5095	1,9626	63
28	0,4695	0,8829	0,5317	1,8807	62
29	0,4848	0,8746	0,5543	1,8041	61
30	0,5000	0,8660	0,5774	1,7321	60
31	0,5150	0,8572	0,6009	1,6643	59
32	0,5299	0,8480	0,6249	1,6003	58
33	0,5446	0,8387	0,6494	1,5399	57
34	0,5592	0,8290	0,6745	1,4826	56
35	0,5736	0,8192	0,7002	1,4281	55
36	0,5878	0,8090	0,7265	1,3764	54
37	0,6018	0,7986	0,7536	1,3270	53
38	0,6157	0,7880	0,7813	1,2799	52
39	0,6293	0,7771	0,8098	1,2349	51
40	0,6428	0,7660	0,8391	1,1918	50
41	0,6561	0,7547	0,8693	1,1504	49
42	0,6691	0,7431	0,9004	1,1106	48
43	0,6820	0,7314	0,9325	1,0724	47
44	0,6947	0,7193	0,9657	1,0355	46
45	0,7071	0,7071	1,0000	1,0000	45
	cos α	sin α	ctg α	tg α	↑ Grade